

Merkblätter zur Vorlesung Analysis I

Wintersemester 2002/03

Prof. Dr. Reinhard Racke

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen und Bezeichnungen	3
1.1 Mengen und Abbildungen	3
1.2 Elemente der Logik	5
2 Zahlen	7
2.1 Natürliche und rationale Zahlen	7
2.2 Reelle Zahlen	11
2.3 Komplexe Zahlen	12
3 Folgen und Grenzwerte	14
4 Reihen	19
5 Elemente der Topologie und der Funktionalanalysis	22
5.1 Mächtigkeit von Mengen	22
5.2 Metrische Räume	24
5.3 Reelle Punktmengen	27
5.4 Kompakte Mengen	30
5.5 Normierte Räume und Hilberträume	34
6 Ergänzungen und Beispiele	37
6.1 Darstellung von Zahlen	37
6.2 Die Zahl e	39
7 Funktionen einer reellen Veränderlichen	41
7.1 Stetige Funktionen	41
7.2 Funktionenfolgen	50
7.3 Elementare Funktionen	53
7.4 Differenzierbare Abbildungen	59
7.5 Der Mittelwertsatz und Folgerungen	63
8 Integration I	69
8.1 Stammfunktionen	69
8.2 Treppenfunktionen und ihre Integrale	72

8.3	Regelfunktionen	77
8.4	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	81
8.5	Vertauschung von Grenzprozessen	83
8.6	Uneigentliche Integrale	87
8.7	Das Riemannsche Integral	91
9	Reihen von Funktionen	94
9.1	Differentiation und Integration	94
9.2	Potenzreihen	97
9.3	Taylorreihen	103
9.4	Der Weierstraßsche Approximationssatz	109
9.5	Orthonormalsysteme	112
9.6	Fourierreihen	119
A	Literatur	126
B	Index	127

1 Grundlagen und Bezeichnungen

1.1 Mengen und Abbildungen

Für die Infinitesimalrechnung werden wir uns mit der sogenannten „naiven Mengenlehre“ begnügen. Eine Menge ist danach die „Zusammenfassung von (endlich oder unendlich vielen) wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten (Elementen) zu einem Ganzen“.

Wir setzen somit voraus, dass wir die Elemente von den Mengen, welche wir betrachten, „kennen“. Die Elemente sind uns z.B. durch explizite Aufführung (z.B.: $M = \{1, 5\}$) oder durch die Angabe einer definierenden Eigenschaft (z.B.: $M = \{x \mid x \text{ ist eine gerade natürliche Zahl} \}$) bekannt.

Beispiele 1.1.1 $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$: natürliche Zahlen

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z} := \{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ oder } -x \in \mathbb{N}_0\}$: ganze Zahlen

$\mathbb{Q} := \{x \mid x = \frac{m}{n} \text{ für ein } m \text{ aus } \mathbb{Z} \text{ und ein } n \text{ aus } \mathbb{N}\}$: rationale Zahlen

$\mathbb{R}$: reelle Zahlen (s. 2. Merkblatt)

$\emptyset$ (oder $\{\}$): leere Menge

Für beliebige Mengen M und N definieren wir:

Definition 1.1.2 $x \in M$: x ist Element von M ,

$x \notin M$: x ist nicht Element von M ,

$M \subset N$: M ist Teilmenge von N ,

$M \subsetneq N$: M ist echte Teilmenge von N ,

$M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$: Vereinigung,

$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$: Durchschnitt,

$M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$: Komplement von N bzgl. M .

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

Hilfssatz 1.1.3 Für beliebige Mengen A, B und C gilt:

(i) $A \cup A = A$ und $A \cap A = A$ (idempotent),

(ii) $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$ (kommutativ),

(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ und $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$ (assoziativ) und

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(distributiv).

Wir führen nun den Begriff der „Abbildung“ ein:

Definition 1.1.4 Bei gegebenen Mengen A und B werde jedem $x \in A$ genau ein Element aus B , das $f(x)$ genannt werde, zugeordnet. Diese Zuordnung f heißt „Abbildung“ oder „Funktion“ von A in B :

$$f : A \rightarrow B$$

$$x \mapsto f(x) .$$

A heißt „Definitionsbereich“ (oder „Definitionsmenge“) von f ,

$R(f) := \{y \in B \mid \text{Es gibt } x \in A \text{ mit } y = f(x)\}$ heißt „Wertebereich“ (oder „Wertemenge“) von f .

Für $C \subset A$ heißt $f(C) := \{y \in B \mid \text{Es gibt } x \in C \text{ mit } y = f(x)\}$ „Bild von C “, entsprechend, für $D \subset B$, heißt

$$f^{-1}(D) := \{x \in A \mid f(x) \in D\} \text{ „Urbild von } D\text{“}.$$

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

Hilfssatz 1.1.5 Seien U, V, U_1, V_1, A und B Mengen mit $U \subset A, V \subset A, U_1 \subset B$ und $V_1 \subset B$ und sei f eine Abbildung von A nach B .

Dann gelten:

- (i) $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$,
- (ii) $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$,
- (iii) $f(A \setminus U) \supset f(A) \setminus f(U)$,
- (iv) $f^{-1}(U_1 \cap V_1) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(V_1)$
- (v) $f^{-1}(U_1 \cup V_1) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(V_1)$
- (vi) $f^{-1}(B \setminus U_1) = A \setminus f^{-1}(U_1)$.

Wir benötigen noch die folgenden Begriffe:

Definition 1.1.6 (i) Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung und sei $C \subseteq A$.

Dann heißt $g := f|_C : C \rightarrow B, x \mapsto f(x)$ „Restriktion von f auf C “.

Für $h : C \rightarrow D$ mit $D \subset B$ und $f|_C = h$ heißt f „Fortsetzung von h “.

(ii) Für $f : A \rightarrow B$ und $g : C \rightarrow D$ mit $f(A) \subset C$ heißt

$h := g \circ f : A \rightarrow D, x \mapsto g(f(x))$ „Verkettung“, „Verknüpfung“, oder „Komposition“ von f und g .

(iii) Für $f : A \rightarrow B$ heißt

$G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$ der „Graph“ von f , wobei

$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ das „Produkt“ von A und B ist.

(iv) $f : A \rightarrow B$ heißt „injektiv“, falls aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$.

f heißt „surjektiv“ (oder Abbildung auf B), falls $R(f) = f(A) = B$ ist.

f heißt „bijektiv“ (oder „eindeutig“ oder „umkehrbar eindeutig“), falls f injektiv und surjektiv ist.

(v) Ist $f : A \rightarrow B$ injektiv, so ist die Abbildung $g : R(f) \rightarrow A$, $y \mapsto g(y) := z$

mit dem eindeutig bestimmten Element z aus $f^{-1}(\{y\})$ definiert und wird mit f^{-1} und „Umkehrabbildung“ bezeichnet.

1.2 Elemente der Logik

Wir benutzen die folgenden abkürzenden Schreibweisen:

$\wedge$: und, $\vee$: oder (nicht ausschließend), $\neg$: nicht, $\forall$: für alle, $\exists$: es gibt, $\frac{1}{\exists}$ es gibt genau ein.

Jeder Aussage A wird ein Wahrheitswert zugeordnet, nämlich w (wahr) oder f (falsch). Wir verabreden ausdrücklich, dass „tertium non datur“ gelten soll, das heißt

$$A \vee (\neg A) \text{ ist immer wahr.}$$

Wir verknüpfen nun Aussagen zu neuen Aussagen. Die logischen Operationen

$\neg A$: Negation

$A \wedge B$: A und B (sowohl A als auch B)

$A \vee B$: A oder B

$A \Rightarrow B$: Implikation

$A \Leftrightarrow B$: Äquivalenz

werden durch „Wahrheitstafeln“ definiert:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Die letzte Spalte folgt aus: $A \Leftrightarrow B := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Besonders interessant sind nun Aussagen, die wie $A \vee (\neg A)$ immer wahr sind:

Hilfssatz 1.2.1 *Es gelten die folgenden Äquivalenzbeziehungen:*

- (i) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$
- (ii) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$
- (iii) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee B$
- (iv) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)).$

Die beiden ersten Regeln heißen de Morgansche Regeln (Auguste de Morgan, 27.6.1806 – 18.3.1871).

Die Aussage (iv) ist besonders wichtig und wird beim „indirekten Beweis“ genutzt; hier geht besonders das „tertium non datur“ ein.

Weitere Abkürzungen:

- $\forall x \in M(:) P(x)$ für alle $x \in M$ gilt $P(x)$
- $\stackrel{(1)}{\exists} x \in M(:) P(x)$ es gibt (genau ein) $x \in M$, für das $P(x)$ gilt.

Es gelten die Regeln von de Morgan:

$$\begin{aligned}\neg(\forall x \in M : P(x)) &\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg(P(x)), \\ \neg(\exists x \in M : P(x)) &\Leftrightarrow \forall x \in M : \neg(P(x)).\end{aligned}$$

2 Zahlen

2.1 Natürliche und rationale Zahlen

Einführung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Wir geben hier nur eine kurze axiomatische Einführung nach Guiseppe Peano (27.8.1858 – 20.4.1939) (vgl. E. Landau: Grundlagen der Analysis (1930)).

Definition 2.1.1 Eine Menge $\mathbb{N}$, natürliche Zahlen genannt, wird axiomatisch definiert durch:

- (1) $1 \in \mathbb{N}$
- (2) $\exists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ injektiv, $f(a) =: a^+$: Nachfolger von a
- (3) $\forall a \in \mathbb{N} : a^+ \neq 1$
- (4) Sei $M \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und $((a \in M) \Rightarrow (a^+ \in M))$.

Dann ist $M = \mathbb{N}$.

Die Summe $a \oplus b$ zweier natürlicher Zahlen (ff. $a + b$ genannt, da $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ mit der üblichen Addition als Standardmodell benutzt wird) lässt sich eindeutig so definieren, dass gilt:

$$a + 1 = a^+ \text{ und } a + b^+ = (a + b)^+.$$

Das Produkt $a \odot b$ zweier natürlicher Zahlen (ff. $a \cdot b$ oder ab genannt) lässt sich eindeutig so definieren, dass gilt:

$$a \cdot 1 = a \text{ und } a \cdot b^+ = a \cdot b + a.$$

Wir erhalten die bekannten Gesetzmäßigkeiten:

Folgerung 2.1.2 Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- 1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativgesetz der Addition)
- 2) $a + b = b + a$ (Kommutativgesetz der Addition)
- 3) $(ab)c = a(bc)$ (Assoziativgesetz der Multiplikation)
- 4) $ab = ba$ (Kommutativgesetz der Multiplikation)
- 5) $a(b + c) = ab + ac$ (Distributivgesetz).

Auf $\mathbb{N}$ lässt sich eine Ordnung $\leq$ mit 1 als erstem (kleinstem) Element erklären.

Wir definieren zunächst den Begriff „Ordnung“:

Definition 2.1.3 Sei X eine Menge.

- 1) $R \subset X \times X$ heißt „Relation“.

Für $(x, y) \in R$ schreiben wir auch „ $x \sim y$ “.

- 2) Eine Relation heißt

- i) „reflexiv“, wenn gilt: $\forall x \in X : x \sim x$,

- ii) „transitiv“, wenn gilt : $\forall x, y, z \in X : (x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z$
- iii) a) „symmetrisch“, wenn gilt: $\forall x, y \in X : x \sim y \Rightarrow y \sim x$ und
 b) „antisymmetrisch“, wenn gilt: $\forall x, y \in X : x \sim y \wedge y \sim x \Rightarrow x = y$.
- 3) Eine reflexive, transitive und symmetrische Relation heißt „Äquivalenzrelation“.
- 4) Eine reflexive, transitive und antisymmetrische Relation heißt „Ordnung in (auf) X “.
- 5) Ein Element $x \in X$ heißt „erstes (kleinstes) Element (bzgl. einer Ordnung R)“, wenn gilt: $\forall y \in X : x \sim y$; analog definiert man ein kleinstes Element einer Teilmenge von X (bzgl. einer Ordnung R).
- 6) Eine Menge X mit einer Ordnung R heißt „vollständig geordnet“, wenn gilt:
 $\forall x, y \in X : x \sim y \vee y \sim x$.
- 7) Eine vollständig geordnete Menge X heißt „wohlgeordnet“, wenn jede nichtleere Teilmenge ein erstes Element besitzt.

Wir können nun auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ wie folgt eine Ordnung erklären:

Definition 2.1.4 1) Wir definieren auf $\mathbb{N}$ eine Relation „ $<$ “ durch:

$$a < b \text{ (oder } b > a) :\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} : b = a + c$$

2) Die Relation „ $\leq$ “ sei erklärt durch:

$$a \leq b :\Leftrightarrow a < b \text{ oder } a = b.$$

Hilfssatz 2.1.5 Die Relation „ $\leq$ “ ist eine Ordnung auf $\mathbb{N}$ mit kleinstem Element 1. Die natürlichen Zahlen sind mit „ $\leq$ “ vollständig geordnet.

Satz 2.1.6 (Wohlordnungssatz)

$\mathbb{N}$ ist wohlgeordnet.

Beweis:

Sei $M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset$.

Annahme: M besitzt kein erstes Element.

Sei $A := \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in M : n \leq m\}$. Dann gilt:

- i) $1 \in A$ (da $M \subset \mathbb{N}$ ist) und
- ii) $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$ (da M nach Annahme kein kleinstes Element besitzt).

Somit ist $A = \mathbb{N}$, also $M = \emptyset$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Q.e.d. (Quod erat demonstrandum)

Die Mengen $\mathbb{N}_0$ bzw. $\mathbb{Z}$ entstehen durch „Lösen der Gleichungen“

$$a + x = a \text{ bzw. } a + x = 0.$$

Eine wichtige Beweismethode ist das Prinzip von der vollständigen Induktion:

Hilfssatz 2.1.7 (Prinzip von der vollständigen Induktion)

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und für alle $n \geq n_0$ seien $A(n)$ Aussagen mit

(i) $A(n_0)$ ist wahr (Induktionsanfang)

(ii) $\forall n \geq n_0 : (A(n) \text{ ist wahr} \Rightarrow A(n+1) \text{ ist wahr})$ (Induktionsschritt oder -schluss).

Dann gilt: $\forall n \geq n_0 : A(n)$ ist wahr.

Beweis:

Sei $S := \{x \in \mathbb{N} \mid x > n_0 \wedge A(x) \text{ ist falsch}\}$.

Annahme: $S \neq \emptyset$.

Dann gibt es ein kleinstes Element $x_0 \in S$ und somit gilt: $x_0 > n_0 \wedge A(x_0 - 1)$ ist wahr. Somit folgt aus dem Induktionsschritt: $A(x_0)$ ist wahr, was ein Widerspruch zu $x_0 \in S$ ist.

Q.e.d.

Mit Hilfe des Prinzips von der vollständigen Induktion kann man z.B. die folgenden Aussagen beweisen:

Beispiele 2.1.8

1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^n i := 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis:

Sei $A(n)$ die Aussage: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

$A(1)$ ist wahr (Induktionsanfang), da gilt: $\sum_{i=1}^1 i = 1$ und $\frac{1(1+1)}{2} = 1$.

Sei $A(n)$ wahr. Dann ist auch $A(n+1)$ wahr (Induktionsschritt), denn:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^n i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Also ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

2) Für $x \in \mathbb{Q}$ (oder $\mathbb{R}$; s. unten für die Definition) mit $x \neq 0$ und $x > -1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$:

$(1+x)^n > 1 + nx$ (Bernoullische Ungleichung, nach Jakob (I) Bernoulli, 27.12.1654 – 16.8.1705).

3) Definiere

$0! := 1$ (Nullfakultät) und

$n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n =: \prod_{i=1}^n i$ für $n \in \mathbb{N}$.

Für $k, n \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n$, seien

$$\binom{n}{k} := \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

die sogenannten „Binomialkoeffizienten“ (lies: „n über k“). Es folgt sofort:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt die binomische Formel:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Einführung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Eine „rationale Zahl“ — ein Element von $\mathbb{Q}$ — wird durch einen Bruch $\frac{p}{q}$ repräsentiert mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, und jeder Bruch repräsentiert eine rationale Zahl.

Zwei Brüche $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ repräsentieren dieselbe rationale Zahl, falls gilt: $p_1 q_2 = p_2 q_1$; $\frac{p}{1}$ wird mit $p \in \mathbb{Z}$ identifiziert.

Wir erinnern an die Definition einer (abelschen) Gruppe und eines Körpers:

Definition 2.1.9 1) Eine Gruppe $(G, \circ)$ ist eine Menge G mit einer Abbildung (Verknüpfung)

$\circ, \circ : (x, y) \in G \times G \mapsto x \circ y \in G$, mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall x, y, z \in G : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (assoziativ)

(ii) $\exists n \in G \forall x \in G : n \circ x = x$ (neutrales Element)

(iii) $\forall x \in G \exists y \in G : y \circ x = n$ (inverses Element).

2) Eine Gruppe G heißt „abelsch“ (Niels Henrik Abel, 5.8.1802 – 6.4.1829) oder

„kommutativ“, falls gilt: $\forall x, y \in G : x \circ y = y \circ x$.

3) Sei K eine Menge, auf der zwei Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ erklärt sind:

$\oplus : (x, y) \in G \times G \mapsto x \oplus y \in G$ und $\odot : (x, y) \in G \times G \mapsto x \odot y \in G$.

$(K, \oplus, \odot)$ heißt „Körper“, falls $(K, \oplus)$ und $(K \setminus \{0\}, \odot)$ (0 bezeichnet hier das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung $\oplus$) abelsche Gruppen sind und das Distributivgesetz gilt:

$$\forall x, y, z \in K : x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z.$$

Wir erklären wie üblich in $\mathbb{Q}$ die Addition und die Multiplikation.

Dann bildet $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ einen Körper.

Die Ordnung lässt sich übertragen, und $\mathbb{Q}$ ist bezüglich dieser Ordnung vollständig geordnet.

Wir definieren noch den Absolutbetrag einer rationalen Zahl:

$$\text{Für } x \in \mathbb{Q} \text{ sei } |x| := \begin{cases} x & , \text{ falls } x \geq 0 \\ -x & , \text{ falls } x < 0. \end{cases}$$

Hilfssatz 2.1.10 Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt:

- 1) $|x| \geq 0$
- 2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- 3) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung).

Wir definieren abschließend (zunächst für $\mathbb{Q}$, später analog für $\mathbb{R}$):

Definition 2.1.11 Für $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$, definiere

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x < b\}, [a, b] := \{x \in \mathbb{Q} \mid a \leq x \leq b\},$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{Q} \mid a \leq x < b\} \text{ und } (a, b] := \{x \in \mathbb{Q} \mid a < x \leq b\}.$$

$$\text{Seien ferner } \mathbb{Q}_{(0)}^+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ (} x \geq 0)\} \text{ und } \mathbb{Q}_{(0)}^- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ (} x \leq 0)\}.$$

2.2 Reelle Zahlen

Die bisher eingeführte Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist noch zu klein. Wir werden sie erweitern zur Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Mit der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bezeichnen wir einen vollständig geordneten Körper, der $\mathbb{Q}$ mit dessen Ordnung enthält und in dem das Vollständigkeitsaxiom gilt.

Bis auf Isomorphismen (lineare und bijekte Abbildungen) ist $\mathbb{R}$ hierdurch eindeutig bestimmt (vgl. S. Lang, Analysis).

Zur Formulierung des Vollständigkeitsaxioms benötigen wir die folgenden Definitionen:

Definition 2.2.1 Sei $S \subset \mathbb{R}$.

- 1) S heißt „von unten (oben) beschränkt“ : $\Longleftrightarrow$

$$\exists a \in \mathbb{R} \forall x \in S : a \leq x \text{ (} a \geq x \text{)};$$

a heißt dann „untere (obere) Schranke von S “.

- 2) S heißt „beschränkt“, falls S von oben und unten beschränkt ist.

- 3) $c \in \mathbb{R}$ heißt „größte untere Schranke (kleinste obere Schranke) von S “ oder „Infimum (Supremum) von S “, falls gilt:

i) c ist untere (obere) Schranke.

ii) Für alle unteren (oberen) Schranken a von S gilt: $a \leq c$ ($a \geq c$).

(Schreibweise: $\inf S$ ($\sup S$)).

Infima und Suprema sind eindeutig bestimmt.

Das Vollständigkeitsaxiom lautet nun:

Axiom 2.2.2 (Vollständigkeitsaxiom) Jede nicht leere von oben (unten) beschränkte Menge S reeller Zahlen besitzt ein Supremum (Infimum) in $\mathbb{R}$.

Bemerkungen 2.2.3 1) $\mathbb{R}$ ist echt größer als $\mathbb{Q}$: $S := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \text{ und } x^2 \leq 2\}$ besitzt kein Supremum in $\mathbb{Q}$, welches „ $\sqrt{2}$ “ wäre. Es gibt jedoch $x \in \mathbb{R}^+$ mit $x^2 = 2$.
Letzteres zeigt man, indem man beweist:

$$a := \sup S$$

existiert und erfüllt die Gleichung.

2) Es wird nicht $\sup S \in S$ (bzw. $\inf S \in S$) gefordert, sondern nur die Existenz $\sup S \in \mathbb{R}$ (bzw. $\inf S \in \mathbb{R}$).

Ist $\sup S \in S$ (bzw. $\inf S \in S$), so nennt man es „Maximum“ (bzw. „Minimum“) (Schreibweise: $\max S$ (bzw. $\min S$)).

3) Reelle Zahlen lassen sich durch rationale approximieren:

Sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists q \in \mathbb{Q} : |r - q| < \varepsilon$.

4) Es werden in der Vorlesung noch zwei weitere Zugänge zu den reellen Zahlen angesprochen werden: der Dedekindsche Schnitt (s. Übungsaufgaben) und die Vervollständigung der rationalen Zahlen mittels Cauchy-Folgen (s. 3. Merkblatt).

5) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit: $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq a < 1/n$. Dann gilt: $a = 0$ (d.h. es gibt keine reelle Zahl, die obere Schranke der natürlichen Zahlen ist).

2.3 Komplexe Zahlen

Als letzte wesentliche Erweiterung führen wir nun noch die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ein; in $\mathbb{C}$ ist es möglich, Gleichungen der Form „ $x^2 + 2 = 0$ “ zu lösen.

Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und erklären die beiden Rechenoperationen $+$, $\cdot$ für $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ durch:

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \text{ („Vektoraddition“)}$$

$$x \cdot y := (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ wird damit zu einem Körper.

Die neutralen Elemente sind: $n_+ = (0, 0)$, $n_\cdot = (1, 0)$.

Das inverse Element bzgl. $\cdot$ zu $x \neq 0$ ist: $\frac{1}{x} = \left(\frac{x_1}{|x|^2}, -\frac{x_2}{|x|^2} \right) =: \frac{1}{|x|^2}(x_1, -x_2)$, wobei der Absolutbetrag wie folgt definiert ist:

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \text{ („Vektorlänge“)}.$$

Der Absolutbetrag hat die üblichen Eigenschaften (s. Hilfssatz 2.1.10).

Definiere für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}$:

$\bar{x} := (x_1, -x_2)$ „konjugiert komplexe Zahl“,

$\operatorname{Re} x := x_1$ „Realteil“ und

$\operatorname{Im} x := x_2$ „Imaginärteil“.

Dann gilt:

Hilfssatz 2.3.1 Für $x \in \mathbb{C}$ ist

$|x| = |\bar{x}|$, $|x|^2 = x \cdot \bar{x}$, $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$, $\bar{\bar{x}} = x$, $\frac{1}{2}(x + \bar{x}) = (\operatorname{Re} x, 0)$ und $\frac{1}{2}(x - \bar{x}) = (0, \operatorname{Im} x)$.

Wir schreiben für $(r, 0)$ vereinfachend wieder r (dies ist möglich aufgrund der Einbettung der reellen Zahlen in die komplexen Zahlen vermöge der Abbildung $r \in \mathbb{R} \mapsto (r, 0) \in \mathbb{C}$).

Sei ferner $i := (0, 1)$ („imaginäre Einheit“). Folglich ist für

$x \in \mathbb{C} : x = (x_1, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1 + ix_2$.

Da $i \cdot i = (-1, 0) = -1$ ist, wird die Gleichung „ $x^2 = -2$ “ gelöst von $x = \pm i\sqrt{2}$.

Bemerkung 2.3.2 Die Ordnungsrelation „ $\leq$ “ ist nicht von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ übertragbar.

Der Absolutbetrag in $\mathbb{C}$ entspricht jedoch der Vektorlänge in $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, so dass sich Begriffe und Aussagen des nächsten Kapitels übertragen lassen.

3 Folgen und Grenzwerte

Im vorigen Kapitel haben wir gesagt, dass die reelle, aber nicht rationale Zahl $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen „approximiert“ werden kann. Wir wollen hier die Begriffe „Folge“, „Konvergenz“ und „Grenzwert“ präzisieren.

Definition 3.1 Eine „Folge von Elementen einer Menge M “ ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M :
 $n \mapsto a_n$.

Ist $M = \mathbb{C}$, so sprechen wir von einer „Zahlenfolge“.

Schreibweisen: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_n$, $\{a_n\}_n$, (a_n) oder $\{a_n\}$.

Als Definitionsbereich einer Folge wählt man oft auch $\mathbb{N}_0$ oder eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ statt $\mathbb{N}$.

Im folgenden sei — falls nicht ausdrücklich anders erklärt — $M \subset \mathbb{R}$.

Nach Augustin-Louis Cauchy (21.8.1789 – 23.5.1857) erklärt man

Definition 3.2 Eine Folge (a_n) heißt „Cauchy-Folge“ (oder „Cauchy-konvergent“) $:\Leftrightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Beispiele 3.3

$a_n :=$	Cauchy-Folge?
1	ja
$\frac{1}{n}$	ja
n	nein
$\sqrt{n}$	nein

Definition 3.4 Eine Zahl a heißt „Grenzwert“ der Folge (a_n) $:\Leftrightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$.

Schreibweisen: $a_n \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} a$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_n a_n$.

Definition 3.5 Eine Folge (a_n) heißt „konvergent“: $\Leftrightarrow$
 (a_n) besitzt einen Grenzwert.

Eine Folge mit Grenzwert Null heißt „Nullfolge“.

Hilfssatz 3.6

Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.

Beweis:

Seien a und a' Grenzwerte von $(a_n)_n$. Damit ist für beliebiges $\varepsilon > 0$:

$$|a - a'| = |a - a_n + a_n - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \varepsilon \text{ für } n \geq \max(n_0(a, \varepsilon/2), n_0(a', \varepsilon/2)).$$

Q.e.d.

Hilfssatz 3.7

Eine Cauchy-Folge (a_n) ist beschränkt, d.h.

$$\exists c \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq c.$$

Hilfssatz 3.8

Eine konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

In $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ gilt auch die Umkehrung von Hilfssatz 3.8 ($\mathbb{R}(\mathbb{C})$ ist vollständig!), was wir nach einiger Vorbereitung beweisen werden.

Definition 3.9 1) Eine Folge (a_n) heißt „monoton wachsend (fallend)“ : $\Leftrightarrow$

$$\forall n : a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1}).$$

2) Eine Folge (a_n) heißt „streng monoton wachsend (fallend)“ : $\Leftrightarrow$

$$\forall n : a_n < a_{n+1} \quad (a_n > a_{n+1}).$$

Hilfssatz 3.10 Sei (a_n) eine monoton wachsende (fallende) und beschränkte Folge. Dann gilt:

$$a_n \rightarrow \sup\{a_1, a_2, \dots\} \quad (a_n \rightarrow \inf\{a_1, a_2, \dots\})$$

Beweis:

Wir beweisen die Aussage nur für eine monoton wachsende beschränkte Folge (a_n) . Sei $a := \sup\{a_1, a_2, \dots\}$ (das Supremum existiert, da die Folge beschränkt ist).

Dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$ (Definition von a .)

Da (a_n) monoton ist, folgt hieraus: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 : a - \varepsilon < a_n \leq a$,

bzw. $|a - a_n| < \varepsilon$.

Q.e.d.

Satz 3.11

In $\mathbb{R}$ konvergiert jede Cauchy-Folge.

Beweis:

Sei (a_n) eine Cauchy-Folge. Insbesondere ist (a_n) beschränkt (Hilfssatz 3.7), d.h.

$$\exists K \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall n : -K \leq a_n \leq K.$$

Sei $c_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$; (c_n) ist beschränkt durch K und monoton wachsend, also gilt:

$$c_n \rightarrow c := \sup\{c_1, c_2, \dots\}.$$

Wir zeigen: $a_n \rightarrow c$. Es gelten:

1. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 : |c_n - c| < \varepsilon/3,$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \quad \forall n, m \geq n_1 : |a_n - a_m| < \varepsilon/3$ und
3. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad \exists k(n) \geq n : |c_n - a_{k(n)}| < \varepsilon/3$ (dies folgt aus der Definition des Infimums).

Hieraus folgt für alle $n \geq n_2 := \max(n_0, n_1)$:

$$|a_n - c| \leq |a_n - a_{k(n)}| + |a_{k(n)} - c_n| + |c_n - c| < \varepsilon.$$

Q.e.d.

Beispiele 3.12 1) Für $p > 0$ gilt: $a_n := \sqrt[p]{p} \rightarrow 1$

Beweis:

a) Der Fall $p = 1$ ist klar.

b) Sei $p > 1$. Dann ist

$$\sqrt[p]{p} = 1 + h_n \text{ mit } h_n > 0.$$

Die Behauptung folgt nun aus:

$$p = (1 + h_n)^n > 1 + n \cdot h_n \text{ für } n \geq 2 \quad (\text{s. Beispiele 2.1.8}), \text{ d.h.}$$

$$0 < h_n < \frac{p-1}{n} \rightarrow 0.$$

c) Sei $p < 1$. Dann ist (s. b))

$$\frac{1}{p} = (1 + h_n)^n > 1 + n \cdot h_n \text{ mit } h_n > 0, \text{ d.h.}$$

$$0 < h_n < \frac{1/p-1}{n} \rightarrow 0.$$

2) Sei $a_n := p^n$ für $p > 0$.

Dann gilt

$$a_n \rightarrow 0 \text{ für } 0 < p < 1, a_n \rightarrow 1 \text{ für } p = 1 \text{ und } a_n \rightarrow \infty \text{ für } p > 1.$$

3) Es gilt: $a_n := \sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ und $a_n := \frac{n}{2^n} \rightarrow 0$.

Es gelten die folgenden Grenzwertsätze:

Satz 3.13 Seien (a_n) und (b_n) zwei Zahlenfolgen mit $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$. Dann gilt:

$$i) a_n + b_n \rightarrow a + b.$$

$$ii) a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$$

iii) Falls $b \neq 0$ und

$$c_n := \begin{cases} a_n/b_n & \text{für } b_n \neq 0 \\ 0 & \text{für } b_n = 0 \end{cases}, \text{ dann gilt: } c_n \rightarrow a/b.$$

$$iv) a_n \rightarrow a \Rightarrow |a_n| \rightarrow |a|.$$

Man betrachtet häufig Teilfolgen von Folgen:

Definition 3.14 1) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

f heißt „(streng) monoton wachsend [bzw. (streng) monoton fallend]“ : $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) < f(x_2))$$

$$[\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))].$$

2) Sei (a_n) eine Folge und $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Funktion. Dann heißt

$n \mapsto a_{\varphi(n)}$ eine „Teilfolge von (a_n) “.

Schreibweise: (a'_n) oder $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ (d.h. : $n_k \geq n$).

Hilfssatz 3.15 Es gelten die folgenden Aussagen:

- i) a_n konvergiert $\Rightarrow$ Jede Teilfolge (a'_n) konvergiert.
- ii) $a_n \rightarrow a \Rightarrow a'_n \rightarrow a$ für jede Teilfolge (a'_n) .
- iii) (a_n) konvergiert, und es gibt eine Teilfolge (a'_n) mit $a'_n \rightarrow a \Rightarrow a_n \rightarrow a$.

Anwendung: Vervollständigung der rationalen Zahlen

Mit Hilfe des Begriffs der Cauchy-Folge werden wir nun eine zweite Methode zur Gewinnung der reellen Zahlen vorstellen. Die reellen Zahlen werden konstruktiv aus den rationalen Zahlen hergeleitet mittels Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen (a_n) mit $a_n \in \mathbb{Q}$.

Wir definieren zunächst die Äquivalenzklassen; wir benötigen sie, da wir verschiedene Cauchy-Folgen, deren Differenz eine Nullfolge bildet, miteinander identifizieren wollen.

Definition 3.16 1) Seien (a_n) und (b_n) zwei Cauchy-Folgen rationaler Zahlen. Wir sagen „ $(a_n) \sim (b_n)$ (d.h. (a_n) und (b_n) sind äquivalent)“ genau dann, wenn $(a_n - b_n)$ Nullfolge ist.

Schreibweise:

$$\alpha := [(a_n)] := \{(b_n) \mid (b_n) \text{ ist Cauchy-Folge in } \mathbb{Q} \text{ und } (a_n) \sim (b_n)\}.$$

2) Bezeichne $\mathbb{A}$ die Menge dieser Äquivalenzklassen.

3) Die Operationen $+$, $\cdot$ aus $\mathbb{Q}$ übertragen sich, d.h. für $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$,

$$\alpha = [(a_n)], \beta = [(b_n)], \text{ seien}$$

$$\alpha + \beta := [(a_n + b_n)] \text{ und } \alpha \cdot \beta := [(a_n \cdot b_n)].$$

Hilfssatz 3.17

$(\mathbb{A}, +, \cdot)$ bildet einen Körper.

Wir können wie folgt eine Ordnung auf $\mathbb{A}$ erklären:

Ist (a_n) keine Nullfolge, so existieren ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$, so dass für alle $m \geq n_0$ gilt: $a_m > p$ oder $a_m < -p$. Im ersten Fall sagen wir: $[(a_n)] \in \mathbb{A}^+$, im zweiten Fall: $[(a_n)] \in \mathbb{A}^-$.

Wir erhalten somit die disjunkte Zerlegung $\mathbb{A} = \mathbb{A}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{A}^+$, wobei wir abkürzend 0 für $[(0)]$ schreiben.

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ sei dann $\alpha > \beta$, falls $\alpha - \beta \in \mathbb{A}^+$ usw.

Auch der Absolutbetrag lässt sich übertragen.

$$\text{Sei für } \alpha = [(a_n)] : |\alpha| := [(|a_n|)].$$

Dann gilt:

Hilfssatz 3.18 Für $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ gilt:

$$i) |\alpha| \in \mathbb{A}_0^+ := \mathbb{A}^+ \cup \{0\}; |\alpha| \in \mathbb{A}^+ \Leftrightarrow \alpha \neq 0.$$

$$ii) \quad |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$

$$iii) \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|.$$

$\mathbb{Q}$ lässt sich vermöge der injektiven Abbildung

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{A}, \quad q \mapsto f(q) := [(q)] := [(q_n)] \text{ mit } q_n := q \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

in $\mathbb{A}$ einbetten, wobei f die algebraischen Operationen $+$, $\cdot$, die Ordnung und den Abstand erhält.

Wir identifizieren also $\mathbb{Q}$ mit $\{[(q)] : q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{A}$ (um Verwechslungen zu vermeiden, schreiben wir von nun an $(q_n)_n$ statt (q_n) für eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen mit nicht-konstanten Gliedern $q_n \in \mathbb{Q}$).

Analog obiger Definition von Cauchy-Folgen nennt man eine Folge $(\alpha_n)_n$, $\alpha_n \in \mathbb{A}$, Cauchy-Folge genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geq n_0 : |\alpha_m - \alpha_n| < [(\varepsilon)].$$

Ebenso definiert man den Grenzwert einer Folge $(\alpha_n)_n$, $\alpha_n \in \mathbb{A}$.

Hilfssatz 3.19 *Elemente aus $\mathbb{A}$ lassen sich in folgendem Sinn durch Elemente aus $\mathbb{Q}$ approximieren:*

$$\forall \alpha \in \mathbb{A} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q \in \mathbb{Q} \text{ so, dass } |\alpha - [(q)]| < [(\varepsilon)].$$

Beweis:

Seien $\alpha = [(a_n)] \in \mathbb{A}$ und $q_j := a_j \in \mathbb{Q}$ für $j \in \mathbb{N}$.

Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $j_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j \geq j_0(\varepsilon)$ gilt:

$$|\alpha - [(q_j)]| = [(a_n - a_j)_n] = [(|a_n - a_j|)_n] < [(\varepsilon)].$$

Satz 3.20

$\mathbb{A}$ ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in $\mathbb{A}$ besitzt einen Grenzwert in $\mathbb{A}$.

Beweis:

Sei $(\alpha_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{A}$, etwa $\alpha_n = [(a_{nj})_j]$ mit $a_{nj} \in \mathbb{Q}$.

Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $j = j(n) \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$|\alpha_n - [(q_n)]| < [(\frac{1}{n})] \text{ für } q_n := a_{nj(n)} \text{ ist.}$$

Nun ist $(q_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, da für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} |q_n - q_m| &\leq |q_n - a_{nk} + a_{nk} - a_{mk} + a_{mk} - q_m| \\ &\leq |q_n - a_{nk}| + |a_{nk} - a_{mk}| + |a_{mk} - q_m| \\ &\leq \frac{1}{n} + |a_{nk} - a_{mk}| + \frac{1}{m} \\ &< \varepsilon \text{ für } n, m \text{ und } k \text{ genügend groß,} \end{aligned}$$

und somit ist $\alpha := [(q_n)_n] \in \mathbb{A}$.

α ist der gesuchte Grenzwert von $(\alpha_n)_n$, denn:

$$|\alpha - \alpha_n| \leq |\alpha - [(q_n)]| + |[(q_n)] - \alpha_n| \leq |\alpha - [(q_n)]| + \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für } n \geq n_1(\varepsilon).$$

Q.e.d.

4 Reihen

Wir führen in diesem Merkblatt den Begriff der „Reihe“ ein und geben einige Konvergenzkriterien für Reihen an.

Definition 4.1 Seien $a_1, a_2, \dots$ Zahlen aus $\mathbb{R}$ (oder ggf. aus $\mathbb{C}$).

- 1) $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ (oder auch $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ für $k \in \mathbb{Z}$) oder $\sum_j a_j$ oder $\sum a_j$ heißt „(unendliche) Reihe mit den Summanden a_j “.
- 2) $s_n := a_1 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j$ heißt „n-te Partialsumme“.
- 3) $\sum a_j$ heißt „konvergent“ genau dann, wenn die Folge (s_n) konvergiert. In diesem Falle heißt $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ „Summe“ der Reihe $\sum a_j$ und wir schreiben: $s = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$.
- 4) $\sum a_j$ heißt „divergent“, wenn sie nicht konvergent ist.

Eine Reihe kann höchstens dann konvergieren, wenn ihre Summanden eine Nullfolge bilden:

Satz 4.2

$\sum a_j$ konvergiert $\Rightarrow (a_j)$ ist Nullfolge.

Die Umkehrung dieses Satzes gilt jedoch nicht. So ist z.B. $\left(\frac{1}{j}\right)$ eine Nullfolge, die „harmonische Reihe“ $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ divergiert jedoch.

Wir betrachten nun die „geometrische Reihe“:

Satz 4.3

Die geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ konvergiert für $|q| < 1$ und divergiert für $|q| \geq 1$.

Beweis:

Die Behauptungen folgen für $q \neq 1$ aus $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (der Fall $q = 1$ ist klar). Für $|q| < 1$ ergibt sich somit:

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}.$$

Für $|q| > 1$ ist q^j keine Nullfolge, was die Divergenz der Reihe impliziert.

Q.e.d.

Ein erstes Konvergenzkriterium ist das der „absoluten Konvergenz“.

Definition 4.4

Die Reihe $\sum a_j$ heißt „absolut konvergent“, wenn $\sum |a_j|$ konvergiert.

Satz 4.5

Wenn eine Reihe $\sum a_j$ absolut konvergent ist, so ist sie auch konvergent.

Beweis:

Für o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) $n > m$ ist

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{j=m+1}^n a_j \right| \leq \sum_{j=m+1}^n |a_j| < \varepsilon \text{ für } n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

Q.e.d.

Die Umkehrung gilt jedoch nicht; so konvergiert die Reihe $\sum_j \frac{(-1)^j}{j}$ nicht absolut, aber nach dem folgenden Satz ist sie konvergent.

Satz 4.6 (Leibniz-Kriterium)

Eine alternierende Reihe $\sum a_j$ in $\mathbb{R}$ (d.h. mit reellen Summanden wechselnden Vorzeichens) konvergiert, wenn $(|a_j|)_j$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

Beweis:

Sei o.B.d.A. $a_{2j} \geq 0$ und $a_{2j-1} \leq 0$ für $j \in \mathbb{N}$.

Dann ist die Folge $(s_{2m})_m$ monoton fallend und nach unten beschränkt, denn:

$s_{2m+2} = s_{2m} + (a_{2m+1} + a_{2m+2}) \leq s_{2m}$, da $a_{2m+1} \leq 0$ und $|a_{2m+1}| \geq a_{2m+2}$ sind, und für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $s_{2m} \geq s_1$.

Analog zeigt man: $(s_{2m-1})_m$ ist monoton steigend und nach oben beschränkt.

Die beiden Folgen konvergieren also (Hilfssatz 3.10) und zwar gegen einen gemeinsamen Grenzwert, s genannt, da $|s_{2m} - s_{2m-1}| = |a_{2m}| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$.

Dies bedeutet die Konvergenz der Folge $(s_n)_n$ gegen den Grenzwert s .

Q.e.d.

Ein weiteres Konvergenzkriterium ist das „Majorantenkriterium“.

Definition 4.7 Seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ Reihen mit nichtnegativen Gliedern und es gelte:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Dann heißt $\sum a_n$ „Minorante“ zu $\sum b_n$, und $\sum b_n$ heißt „Majorante“ zu $\sum a_n$.

Satz 4.8 (Majorantenkriterium)

$\sum |a_n|$ habe eine konvergente Majorante. Dann konvergiert $\sum a_n$ absolut.

Das Majorantenkriterium liefert weitere wichtige Konvergenzkriterien, z.B. durch Vergleich mit der geometrischen Reihe.

Satz 4.9 (Quotientenkriterium)

Es gelte: $\exists q \in (0, 1) \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \text{ mit } a_n \neq 0 :$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q.$$

Dann konvergiert $\sum a_n$ absolut.

Beweis:

Für $n \geq k$, $a_n \neq 0$ und $m \in \mathbb{N}$ ist $|a_{n+m}| \leq q^m |a_n|$. Somit hat $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{k+j}|$ die konvergente Majorante $|a_k| \sum_{j=0}^{\infty} q^j$.

Q.e.d.

Satz 4.10 (Wurzelkriterium)

Es gelte: $\exists q \in (0, 1) \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$.

Dann konvergiert $\sum a_n$ absolut.

Diese Kriterien sind hinreichend, aber nicht notwendig, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 4.11 Sei $\zeta(s) := \sum \frac{1}{j^s}$ die Riemannsche Zetafunktion.

Es gilt: $\zeta(s)$ konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \leq 1$.

Wir untersuchen hier nur den Fall $s = 2$. Dann sind weder das Wurzel- noch das Quotientenkriterium anwendbar, da

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{(1+1/n)^2} \rightarrow 1 \text{ und} \\ \sqrt[n]{|a_n|} &= \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \rightarrow 1; \end{aligned}$$

jedoch ist die Folge s_n monoton wachsend und nach oben beschränkt, da

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j^2} \leq 1 + \sum_{j=2}^n \frac{1}{j(j-1)} = 1 + \sum_{j=2}^n \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2, \end{aligned}$$

und somit konvergent.

(Es gilt: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$, s. Merkblatt 9 zur Theorie der Fourierreihen.)

5 Elemente der Topologie und der Funktionalanalysis

Wir werden uns in diesem Kapitel mit allgemeinen Mengen und möglichen Strukturen, die diese Mengen tragen können, beschäftigen.

Im Abschnitt 5.1 führen wir den Begriff „Kardinalität“ ein, der einen „Größenvergleich“ ermöglicht. Die Abschnitte 5.2 - 5.4 behandeln „metrische Räume“. Metrische Räume müssen keine Vektorraumstruktur tragen, aber es ist dennoch möglich, in ihnen Abstände zu messen. So können wir auf metrischen Räumen Cauchy-Folgen etc. erklären, und wir definieren und diskutieren spezielle Eigenschaften von Mengen wie „Abgeschlossenheit“ oder „Kompaktheit“.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels betrachten wir Vektorräume, für die eine „Norm“ oder ein „Skalarprodukt“ gegeben ist.

5.1 Mächtigkeit von Mengen

Eine mögliche Eigenschaft von Mengen ist ihre „Mächtigkeit“, ihre „Größe“.

Definition 5.1.1 1) Seien A und B zwei Mengen. Existiert eine bijektive Abbildung von A auf B , so sagt man, dass A und B dieselbe „Kardinalzahl“ („Kardinalität“) haben, oder auch, dass A und B „gleichmächtig“ oder „äquivalent“ sind.
In diesem Falle schreiben wir $A \sim B$. $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

2) Sei A eine Menge. A heißt

- i) „endlich“, falls $A \sim \emptyset$ oder $A \sim \{1, \dots, n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$,
- ii) „unendlich“, falls A nicht endlich ist,
- iii) „abzählbar“, falls $A \sim \mathbb{N}$ oder falls A endlich ist
- iv) „überabzählbar“, falls A nicht abzählbar ist.

Beispiel 5.1.2

$$\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}, \text{ da } f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} n/2 & n \text{ gerade} \\ -\frac{n-1}{2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

eine Bijektion auf $\mathbb{Z}$ ist. Insbesondere ist $\mathbb{Z}$ abzählbar.

Bemerkung 5.1.3 Obiges Beispiel zeigt, dass eine unendliche Menge einer echten Teilmenge äquivalent sein kann; bei endlichen Mengen ist das unmöglich.

Satz 5.1.4

Seien A_n , $n \in \mathbb{N}$, abzählbare Mengen. Dann ist auch $M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ abzählbar.

Beweis:

Da $A_n \sim \mathbb{N}$ ist, können wir die Elemente von A_n als Folge $(a_{nj})_j$ mit paarweise verschiedenen Gliedern anordnen.

Wir ordnen nun die Elemente von M wie folgt an:

a_{11}

$a_{21}a_{12}$

$a_{31}a_{22}a_{13}$

$\vdots$

wobei mehrfach auftretende Elemente nur einmal aufgeführt werden. Also ist M höchstens abzählbar und wegen $A_1 \subset M$ ist M unendlich und somit abzählbar.

Q.e.d.

Insbesondere interessieren die Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

Satz 5.1.5 *Es gilt*

i) *Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.*

ii) *Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Beweis:

zu i) Für rationale Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ haben wir die Darstellung:

$$q = \frac{m}{n}, \text{ wobei } m \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ sind.}$$

Die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ folgt nun aus der Abzählbarkeit von $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Q.e.d.

zu ii) Wir führen einen Widerspruchsbeweis.

Annahme: Es gebe eine Anordnung $\{a_1, a_2, \dots\}$ von $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Die Zahlen a_n mögen die Dezimaldarstellung (vgl. 6. Merkblatt)

$$a_n = 0, b_{n1}b_{n2} \dots \text{ mit } 0 \leq b_{nj} \leq 9, j \in \mathbb{N}, \text{ haben, d.h. } a_n = \sum_{j=1}^{\infty} b_{nj}10^{-j}.$$

$$\text{Sei } c := 0, c_1c_2 \dots \text{ mit } c_j := \begin{cases} 1 & \text{für } b_{jj} \neq 1 \\ 2 & \text{für } b_{jj} = 1. \end{cases}$$

Dann ist $c \neq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, da sich c von a_n an der n -ten Stelle unterscheidet: $c_n \neq b_{nn}$.

Damit hat die Annahme zu einem Widerspruch geführt, d.h. $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Q.e.d.

Die Grundidee des obigen Beweises wurde zuerst von Georg Cantor (3.3.1845 – 6.1.1918) benutzt und ist als Cantorsches Diagonalverfahren bekannt.

Bemerkungen 5.1.6

1) Bei endlichen Mengen, $A \sim \{1, \dots, n\}$, spricht man von der Kardinalzahl $\#A = n$, bei $A \sim \mathbb{N} : \#A = \aleph_0$ (Aleph ($\aleph$), der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets) und für

$A \sim \mathbb{R} : \#A = \aleph$ (Mächtigkeit des Kontinuums).

Die sogenannte „Kontinuumshypothese“ besagt, dass es keine Menge mit einer Kardinalzahl „zwischen“ $\aleph_0$ und $\aleph$ gibt. Nach Ergebnissen von Kurt Gödel (28.4.1906 – 14.1.1978) und Paul Joseph Cohen (*2.4.1934) ist diese Hypothese aus den Axiomen der Mengenlehre weder zu beweisen noch zu widerlegen.

2) Bezeichne für eine Menge A $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A , das heißt die Menge aller Teilmengen.

Dann gilt: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.

Für endliche Mengen ist $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$. In diesem Sinn ist $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

5.2 Metrische Räume

Wir können den „Abstand“ zweier Zahlen a und b (z.b. $a, b \in \mathbb{R}$) voneinander mit Hilfe des Absolutbetrags $|x - y|$ messen. Wir wollen hier dieses Konzept des „Abstandes“ auf „metrische Räume“ übertragen, die insbesondere keine Vektorraumstruktur haben müssen, d.h. in denen der Ausdruck „ $x - y$ “ nicht erklärt ist.

Definition 5.2.1 Sei X eine Menge. Dann heißt $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ „Metrik auf X “ : $\iff \forall x_1, x_2, x_3 \in X :$

$$(i) \quad d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$$

$$(ii) \quad d(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$$

$$(iii) \quad d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2) \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

Definition 5.2.2

Eine Menge X mit einer Metrik d heißt „metrischer Raum (X, d) “.

Wir kennen bereits einige Beispiele für metrische Räume:

Beispiele 5.2.3 1) Definiere für $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d_1(x, y) := |x - y| := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

$$d_2(x, y) := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

$$d_3(x, y) := \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i| \text{ und}$$

$$d_4(x, y) := \sqrt{|x - y|}.$$

$(\mathbb{R}^n, d_i)$, $i = 1, \dots, 4$, sind metrische Räume.

2) $([0, 1], d)$ mit $d(x, y) := |x - y|$ für $x, y \in [0, 1]$ ist ein metrischer Raum.

3) Sei X eine beliebige Menge. Definiere die „diskrete Metrik“

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad (x, y) \mapsto d(x, y) := \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

(X, d) ist ein metrischer Raum.

Wir können in metrischen Räumen Kugeln und Cauchy-Folgen erklären:

Definition 5.2.4 Seien (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $r > 0$.

Dann heißt

$$B(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

„Kugel (Ball) um x_0 mit Radius r “.

Definition 5.2.5 Sei (X, d) ein metrischer Raum.

1) Eine Folge (x_n) in X heißt „Cauchy-Folge“ : $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

2) $x \in X$ heißt „Grenzwert“ der Folge (x_n) : $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

3) X heißt „vollständig“ genau dann, wenn jede Cauchy-Folge in X einen Grenzwert in X besitzt.

Wir können zwei metrische Räume miteinander identifizieren, wenn sie isometrisch sind.

Definition 5.2.6 Zwei metrische Räume (X, d_X) und (Y, d_Y) heißen „isometrisch“, wenn eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ existiert mit der Eigenschaft:

$$\forall x_1, x_2 \in X : d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

Ähnlich wie bei dem Prozess der Vervollständigung der rationalen Zahlen über Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen zu $\mathbb{R}$ können auch allgemeine metrische Räume vervollständigt werden.

Zur Formulierung dieses Ergebnisses benötigen wir noch die folgende Definition:

Definition 5.2.7

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und sei $X_0 \subset X$.

$$X_0 \text{ heißt „dicht in } X \text{“} : \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in X_0 \text{ mit } d_X(x, x_0) < \varepsilon.$$

Es gilt:

Satz 5.2.8

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum (Y, d_Y) und einen dichten Teilraum (Y_0, d_Y) von Y , so dass gilt: (X, d_X) und (Y_0, d_Y) sind isometrisch.

Wir schließen diesen Abschnitt mit dem sehr häufig angewendeten „Banachschen Fixpunktsatz“ (Stefan Banach, 30.3.1892 – 31.8.1945). Dieser Satz gibt ein hinreichendes Kriterium für die Lösbarkeit der „Fixpunktgleichung“ $T(x) = x$ in allgemeinen metrischen Räumen.

Definition 5.2.9

Seien (X, d) ein metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine Abbildung. T heißt „kontrahierend“ : $\Leftrightarrow \exists k \in [0, 1) \forall x, y \in X : d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$.

Satz 5.2.10 Seien (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T : X \rightarrow X$ eine kontrahierende Abbildung.

Dann gibt es genau ein $\hat{x} \in X$ mit : $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

Ferner gilt für $x_0 \in X$ beliebig, $x_n := T(x_{n-1})$ für $n = 1, 2, \dots$: $d(x_n, \hat{x}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$.

Beweis:

1. Wir zeigen zunächst, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist, wobei x_n wie in der Formulierung des Satzes definiert sei.

Es gilt:

$$\begin{aligned} d(x_{n+m}, x_n) &\leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (k^{n+m-1} + \dots + k^n) d(x_1, x_0) \\ &= k^n (k^{m-1} + \dots + 1) d(x_1, x_0) \\ &\leq k^n \left(\sum_{j=0}^{\infty} k^j \right) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ unabhängig von } m. \end{aligned}$$

2. X ist vollständig; die Cauchy-Folge (x_n) konvergiert somit gegen einen Grenzwert $\hat{x} \in X$.

Wir zeigen: $\hat{x}$ ist Fixpunkt, d.h. $T(\hat{x}) = \hat{x}$.

Es ist

$$\begin{aligned} d(\hat{x}, T(\hat{x})) &\leq d(\hat{x}, x_n) + d(x_n, T(\hat{x})) = d(\hat{x}, x_n) + d(T(x_{n-1}), T(\hat{x})) \\ &\leq d(\hat{x}, x_n) + k d(x_{n-1}, \hat{x}) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

und somit ist $d(\hat{x}, T(\hat{x})) = 0$.

3. Der Fixpunkt $\hat{x}$ ist eindeutig, denn für einen weiteren Fixpunkt $\check{x}$ würde gelten:

$$d(\hat{x}, \check{x}) = d(T(\hat{x}), T(\check{x})) \leq k d(\hat{x}, \check{x}) \text{ für } k \in [0, 1), \text{ und somit muss } d(\hat{x}, \check{x}) = 0 \text{ sein.}$$

4. Die behauptete Fehlerabschätzung folgt sofort aus der im 1. Schritt bewiesenen Abschätzung.

Q.e.d.

Wir geben nun noch ein Anwendungsbeispiel für den Banachschen Fixpunktsatz an:

Beispiel 5.2.11 Das Ziel ist die Berechnung von $\sqrt{2}$ mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes.

Seien $X := [1, 2]$, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $(x, y) \mapsto |x - y|$ die Metrik und $T : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$x \mapsto Tx := x + c(2 - x^2)$ für $c \neq 0$ beliebig. Ein Fixpunkt der Abbildung T löst offenbar die Gleichung: $2 - x^2 = 0$. Es gilt:

i) (X, d) ist ein vollständiger metrischer Raum.

ii) T ist eine Abbildung nach X für $c \in [0, \frac{1}{2}]$.

iii) T ist kontrahierend für $c \in (0, \frac{1}{2})$, da für $x_1, x_2 \in [1, 2]$

$$|T(x_1) - T(x_2)| = |x_1 - x_2| \cdot |1 - c(x_1 + x_2)| \text{ ist.}$$

Das bedeutet, dass für $c \in (0, \frac{1}{2})$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind und die Folge $x_n := Tx_{n-1}$, $x_0 \in [1, 2]$ beliebig, gegen den eindeutigen Fixpunkt $\hat{x} = \sqrt{2}$ konvergiert.

Wählen wir $c = \frac{1}{3}$, so ergibt sich für die Kontraktionskonstante $k = \frac{1}{3}$, und die Fehlerabschätzung liefert (wenn wir bei $x_0 = 1$ beginnen) für den zehnten Iterationsschritt:

$$|\sqrt{2} - x_{10}| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{10}.$$

5.3 Reelle Punktmengen

In diesem Abschnitt werden wir noch einige Begriffe aus der Theorie metrischer Räume einführen und sie gegebenenfalls auf reelle Punktmengen spezialisieren.

In diesem Abschnitt bezeichne durchgängig (X, d) einen metrischen Raum.

Definition 5.3.1 i) $x \in M \subset X$ heißt „innerer Punkt“ von M : $\Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset M.$$

ii) $M \subset X$ heißt „offen“ : $\Leftrightarrow$

M besteht nur aus inneren Punkten.

iii) Seien $M \subset X$ und $x_0 \in X$. x_0 heißt „Häufungspunkt von M “ (kurz: HP) : $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M, x \neq x_0 : x \in B(x_0, \varepsilon).$$

iv) $x_0 \in M \subset X$ heißt „isolierter Punkt von M “ : $\Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 : (B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap M = \emptyset.$$

v) $M \subset X$ heißt „abgeschlossen“ : $\Leftrightarrow$

alle Häufungspunkte von M gehören zu M .

vi) Sei $M \subset X$. Dann heißt

$$\overline{M} := M \cup \{x_0 \in X \mid x_0 \text{ HP von } M\} \text{ „Abschluss von } M \text{ in } X\text{“}.$$

vii) Sei $M \subset X$. Dann heißt $M^c := X \setminus M$ das „Komplement von M in X “.

Beispiele 5.3.2

i) $\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{R}$ offen und abgeschlossen.

ii) $(0, 1]$ ist in $\mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen.

Das Komplement offener Mengen ist abgeschlossen und umgekehrt.

Satz 5.3.3

$M \subset X$ ist offen $\Leftrightarrow M^c$ ist abgeschlossen.

Beweis:

i) Wir zeigen zunächst durch Widerspruch: $M \subset X$ offen $\Rightarrow M^c$ abgeschlossen.

Annahme: Es gibt einen Häufungspunkt x_0 von M^c , der nicht in M^c liegt, d.h. $x_0 \in M$.

Da M offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x_0, \varepsilon) \subset M$. Somit kann x_0 kein HP von M^c sein. Widerspruch.

ii) Wir zeigen nun: M^c abgeschlossen $\Rightarrow M$ offen.

Sei $x_0 \in M = X \setminus M^c$. Da M^c abgeschlossen ist, ist x_0 kein HP von M^c und somit existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x_0, \varepsilon) \subset M$.

Q.e.d.

Definition 5.3.4 i) Sei $M \subset X$. $x_0 \in X$ heißt „Randpunkt von M “ (Schreibweise:

„ $x_0 \in \partial M$ “) $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in B(x_0, \varepsilon) \cap M$ und $\exists y \in B(x_0, \varepsilon) \cap M^c$.

ii) $M \subset X$ heißt „beschränkt“ $: \Leftrightarrow \exists r > 0 \exists x_0 \in X : M \subset B(x_0, r)$.

Beispiel 5.3.5 Sei $M := (0, 1] \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$; M ist eine beschränkte Menge.

$(0, 1)$ ist die Menge der inneren Punkte, $[0, 1]$ die der Häufungspunkte, $\{0, 1, 2\}$ die der Randpunkte, $\{2\}$ die der isolierten Punkte und $\overline{M} = [0, 1] \cup \{2\}$.

Definition 5.3.6 $U \subset X$ heißt „Umgebung des Punktes $x_0 \in X$ “ (Schreibweise: „ $U(x_0)$ “) $: \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subset U$.

Satz 5.3.7

Sind $U \subset X$ und $V \subset X$ Umgebungen des Punktes $x_0 \in X$, so auch $U \cap V$.

Satz 5.3.8

Seien $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$. Dann existieren Umgebungen $U(x_1)$ und $U(x_2)$ mit $U(x_1) \cap U(x_2) = \emptyset$.

Beweisidee:

Wähle für $\varrho := d(x_1, x_2)$ und $i = 1, 2$: $U(x_i) := B(x_i, \varrho/2)$.

Bemerkung 5.3.9

Allgemeine topologische Räume (s.u. zur Definition topologischer Räume), in denen die Aussage des obigen Satzes gilt, heißen „Hausdorff-Räume“; die Forderung nach der Existenz von disjunkten Umgebungen zu zwei verschiedenen Punkten heißt „Hausdorffsches Trennungsaxiom“ (nach Felix Hausdorff, 8.11.1868 – 26.1.1942).

Satz 5.3.10

- 1) Die beliebige Vereinigung offener Mengen ist offen.
- 2) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Bemerkungen 5.3.11

- 1) Es gilt nicht: Der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen ist offen; zum Beispiel ist für $X = \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}$ und $M_i := (0, 1 + \frac{1}{i})$ der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = (0, 1]$ nicht offen.
- 2) Aus obigem Satz folgt natürlich sofort:
 - i) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
 - ii) Der beliebige Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Für die Menge der reellen (oder der komplexen) Zahlen gilt der folgende wichtige Satz von Bolzano & Weierstraß (Bernard Bolzano, 5.10.1781 – 18.12.1848; Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 31.10.1815 – 19.2.1897).

Satz 5.3.12 (Bolzano & Weierstraß)

Jede unendliche beschränkte Menge M reeller (komplexer) Zahlen besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis:

Seien $x_1, x_2, \dots$ Punkte aus M mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und $c_n := \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Dann ist (c_n) eine monoton wachsende und beschränkte Folge und somit für $n \rightarrow \infty$ konvergent gegen den Grenzwert $c := \sup\{c_1, c_2, \dots\} \in \mathbb{R}$. Es gibt höchstens ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{j_0} = c$. Streiche dieses x_{j_0} aus der Folge (x_i) . Dann ist c ein Häufungspunkt von M , denn es gilt:

$$\forall n \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_k, k \geq n : |x_k - c_n| < \varepsilon/2,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : |c_{n_0} - c| < \varepsilon/2 \text{ und somit}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \geq n_0 : |x_k - c| \leq |x_k - c_{n_0}| + |c_{n_0} - c| < \varepsilon, x_k \neq c.$$

Q.e.d.

Obiger Beweis schreibt sich kürzer mit der folgenden Definition:

Definition 5.3.13

Seien $a_n \in \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$.

1) Sei (a_n) nach oben beschränkt.

Dann heißt $\overline{\lim} a_n := \limsup_{n \rightarrow \infty} \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$
der „limes superior“ der Folge (a_n) .

2) Sei (a_n) nach unten beschränkt.

Dann heißt $\underline{\lim} a_n := \liminf_{n \rightarrow \infty} \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$
der „limes inferior“ der Folge (a_n) .

Bemerkung 5.3.14

Es gilt: (a_n) konvergiert $\Leftrightarrow \underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Wir haben in diesem Abschnitt vor der Spezialisierung auf die reellen (komplexen) Zahlen metrische Räume betrachtet.

Wir wollen nun noch allgemeinere Räume, nämlich „topologische Räume“, definieren.

Definition 5.3.15 Seien X eine Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X . Dann heißt $\mathcal{T}$ „Topologie“ auf X oder $(X, \mathcal{T})$ „topologischer Raum“ : $\Leftrightarrow$

i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

ii) Sei Λ eine beliebige Indexmenge und seien $\mathcal{O}_\lambda \in \mathcal{T}$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann ist $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda \in \mathcal{T}$.

iii) Für alle $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}$ ist $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}$.

Die Elemente $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ heißen „(bzgl. $\mathcal{T}$) offene Mengen“.

Beispiele 5.3.16

1) $\mathcal{T}_t := \{\emptyset, M\}$: triviale (gröbste) Topologie.

2) $\mathcal{T}_d := \mathcal{P}(M)$: diskrete (feinste) Topologie.

3) Für einen metrischen Raum (X, d) ist $\mathcal{T} := \{V \subset X \mid V \text{ ist offen in } X\}$ eine Topologie.
Insbesondere ist somit jeder metrische Raum auch ein topologischer Raum.

5.4 Kompakte Mengen

Wir werden in diesem Abschnitt den Begriff „kompakte Mengen“ für metrische Räume definieren und diskutieren. In $\mathbb{R}$ lassen sich kompakte Mengen besonders leicht charakterisieren.

Doch zunächst zur Definition:

Definition 5.4.1 Seien (X, d) ein metrischer Raum, Λ eine beliebige Indexmenge, U_λ für $\lambda \in \Lambda$ offene Teilmengen von X und $U := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

1) Dann heißt U „offene Überdeckung von $M \subset X$ “ : $\Leftrightarrow$

$\forall x \in M \quad \exists \lambda \in \Lambda : x \in U_\lambda$.

2) U enthält eine „endliche Teilüberdeckung von M “ : $\Leftrightarrow$

$$\exists n \in \mathbb{N} \exists i_1, \dots, i_n \in \Lambda : M \subset \bigcup_{j=1}^n U_{i_j}.$$

Definition 5.4.2 Sei (X, d) ein metrischer Raum. $M \subset X$ heißt „kompakt“, wenn jede offene Überdeckung U von M eine endliche Teilüberdeckung enthält.

Bemerkungen 5.4.3 1) Die oben definierte Eigenschaft heißt auch „Heine-Borel-Eigenschaft“ (Heinrich Eduard Heine, 16.3.1821 – 21.10.1881; Emile Borel, 7.1.1871 – 3.2.1956).

2) Offensichtlich ist jede endliche Menge kompakt.

Wir beweisen zunächst ein notwendiges Kriterium für Kompaktheit, das für $X = \mathbb{R}$ (im allgemeinen aber nicht) auch hinreichend ist.

Satz 5.4.4

In einem metrischen Raum (X, d) ist eine kompakte Menge beschränkt und abgeschlossen.

Beweis:

Seien $M \subset X$ kompakt und $x_0 \in M$. Dann ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(x_0, n)$ eine offene Überdeckung von M . Da M kompakt ist, genügen endlich viele Kugeln $B(x_0, n)$ zur Überdeckung von M ; dies bedeutet aber: $\exists n_0 \in \mathbb{N} : M \subset B(x_0, n_0)$, und somit ist M beschränkt.

Wir zeigen nun: $X \setminus M$ ist offen.

Sei $x \in X \setminus M$. Dann gibt es für alle $m \in M$ ein $\varepsilon_m > 0$ so, dass $B(x, \varepsilon_m) \cap B(m, \varepsilon_m) = \emptyset$. Da $M \subset \bigcup_{m \in M} B(m, \varepsilon_m)$ und M kompakt ist, existieren ein $k \in \mathbb{N}$ und $m_j \in M, j = 1, \dots, k$, so, dass $M \subset \bigcup_{j=1}^k B(m_j, \varepsilon_{m_j})$.

Sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_{m_1}, \dots, \varepsilon_{m_k}\} > 0$ (hier geht die Kompaktheit von M ein). Dann gilt:

$B(x, \varepsilon) = \bigcap_{j=1}^k B(x, \varepsilon_{m_j})$ ist offen und $(B(x, \varepsilon) \cap M) \subset \bigcup_{j=1}^k (B(x, \varepsilon) \cap B(m_j, \varepsilon_{m_j})) = \emptyset$, d.h. $B(x, \varepsilon) \subset X \setminus M$.

Q.e.d.

Die Umkehrung dieses Satzes ist i.a. falsch, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 5.4.5 Sei X eine unendliche Menge und d die auf X erklärte diskrete Metrik, d.h.

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+, (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases}$$

X ist beschränkt, da für ein festes $y \in X$ und beliebiges $x \in X$ $d(x, y) \leq 1$ gilt. Als ganzer Raum ist X auch abgeschlossen. Da $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$ ist, gilt: $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \frac{1}{2})$; also ist $\bigcup_{x \in X} B(x, \frac{1}{2})$ eine offene Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

Es gilt jedoch:

Hilfssatz 5.4.6

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Abgeschlossene Teilmengen von in (X, d) kompakten Mengen sind kompakt.

Beweis:

Seien $K \subset X$ eine kompakte, $A \subset K$ eine abgeschlossene Menge und $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ (für eine beliebige Indexmenge Λ) eine offene Überdeckung von A . Dann ist $\{M_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \cup (X \setminus A)$ eine offene Überdeckung von K ; für diese existiert eine endliche Teilüberdeckung, die somit auch A überdeckt. Falls $X \setminus A$ zu dieser dazugehört, können wir sie zur Überdeckung von A weglassen. Q.e.d.

Wir betrachten nun speziell den Raum $\mathbb{R}^n$ mit der Metrik

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+, (x, y) \mapsto d(x, y) := |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i)^2},$$

wobei $x =: (\xi_1, \dots, \xi_n)$ und $y =: (\eta_1, \dots, \eta_n)$ seien. Unser Ziel ist eine Charakterisierung der kompakten Mengen in $(\mathbb{R}^n, d)$.

Im $\mathbb{R}^n$ betrachten wir „abgeschlossene Intervalle“ J , die wie folgt definiert sind:

$$J := \{x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_j \leq \xi_j \leq \beta_j, j = 1, \dots, n\}$$

für gegebene α_j, β_j mit $-\infty < \alpha_j < \beta_j < \infty$.

Hilfssatz 5.4.7 (Intervallschachtelung)

Ist (J_i) eine Folge abgeschlossener Intervalle im $\mathbb{R}^n$ mit

$$J_i \supset J_{i+1}, i \in \mathbb{N}, \text{ so gilt: } \bigcap_{i=1}^{\infty} J_i \neq \emptyset.$$

Beweis:

Sei o.B.d.A. $n = 1$. Wähle für jedes $i \in \mathbb{N}$ $x_i \in J_i$; sei o.B.d.A. $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. (x_i) ist eine beschränkte Folge und besitzt somit nach dem Satz von Bolzano & Weierstraß (Satz 5.3.12) eine konvergente Teilfolge, die wir (x'_n) nennen wollen; ihr Grenzwert heiße x_0 (x_0 ist HP von $\{x_1, x_2, \dots\}$).

Annahme: $x_0 \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} J_i$.

Dann gibt es insbesondere ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x_0 \notin J_k$; also gilt $\forall m \geq k : x_0 \notin J_m$ und sogar $\exists \varepsilon > 0 \forall x \in J_m : |x - x_0| > \varepsilon$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Konvergenz von (x'_n) gegen x_0 .

Q.e.d.

Hilfssatz 5.4.8

Sei J ein abgeschlossenes Intervall im $\mathbb{R}^n$. Dann ist J kompakt.

Beweis:

Seien $J = \{x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \leq \xi_i \leq \beta_i, i = 1, \dots, n\}$ und

$$\delta := \sqrt{\sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j)^2} \text{ (d.h. } \forall x, y \in J : |x - y| \leq \delta).$$

Annahme: Es gebe eine offene Überdeckung $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von J , die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Wir teilen J nun in 2^n abgeschlossene Intervalle Q_i , die alle die halbe Kantenlänge von J haben. Mindestens eine dieser Mengen Q_i kann nach unserer Annahme nicht endlich überdeckt werden; wir nennen diese J_1 .

Nun unterteilen wir J_1 wiederum in 2^n Intervalle Q_i mit halber Kantenlänge, wählen ein nicht endlich überdeckbares abgeschlossenes Intervall J_2 mit halber Kantenlänge von J_1 und fahren analog fort.

Wir erhalten eine Folge $(J_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

- i) $J_i \supset J_{i+1}$
- ii) $\forall x, y \in J_i : |x - y| \leq \frac{\delta}{2^i}$
- iii) J_i ist nicht endlich überdeckbar.

Nach Hilfssatz 5.4.7 existiert ein $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} J_i$. Ferner existiert ein $\lambda_0 \in \Lambda : z \in M_{\lambda_0}$; da M_{λ_0} offen ist, gibt es ein $r > 0$ mit $B(z, r) \subset M_{\lambda_0}$. Ist i_0 so groß, dass $\frac{\delta}{2^{i_0}} < r$ ist, so ist $J_{i_0} \subset M_{\lambda_0}$, was in Widerspruch zur nicht endlichen Überdeckbarkeit aller J_i steht.

Q.e.d.

Wir können nun die gewünschte Charakterisierung kompakter Mengen in $\mathbb{R}^n$ beweisen.

Satz 5.4.9

Für $M \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- (i) M ist beschränkt und abgeschlossen.
- (ii) M ist kompakt.
- (iii) Jede unendliche Teilmenge von M hat einen Häufungspunkt in M .

Beweis:

Zu: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Es existiert ein abgeschlossenes Intervall J mit $M \subset J$. J ist kompakt (Hilfssatz 5.4.8) und nach Hilfssatz 5.4.6 sind abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen kompakt.

Zu: (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Annahme: Sei E eine unendliche Teilmenge von M ohne Häufungspunkt in M .

Dann existiert für alle $m \in M$ ein $\varepsilon_m > 0$ mit

$$B(m, \varepsilon_m) \cap E = \begin{cases} \{m\} & \text{für } m \in E \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}.$$

E wird folglich von keiner endlichen Teilmenge von $\bigcup_{m \in M} B(m, \varepsilon_m)$ überdeckt und somit auch M nicht. Widerspruch zur Kompaktheit von M .

Zu: (iii) $\Rightarrow$ (i)

Annahme: M ist unbeschränkt.

Insbesondere gibt es dann für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $|x_n| > n$. (x_n) hat jedoch keinen HP in $\mathbb{R}^n$, was ein Widerspruch zu den Voraussetzungen (iii) ist.

Annahme: M ist nicht abgeschlossen.

Dann existiert ein $HP\ z \in \mathbb{R}^n \setminus M$ der Menge M . Also existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $|x_n - z| < \frac{1}{n}$. $\{x_1, x_2, \dots\}$ ist eine unendliche Teilmenge von M mit einzigem $HP\ z \notin M$. Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung.

Q.e.d.

5.5 Normierte Räume und Hilberträume

Wir betrachten nun Räume, die mehr Struktur aufweisen als z.B. nur metrische Räume, insbesondere algebraische Struktur. Wir erinnern zunächst an den Begriff eines „Vektorraums“:

Definition 5.5.1 Seien X eine Menge und K ein Körper und es seien auf X Abbildungen

$$\begin{aligned} + & : X \times X \rightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x + y \text{ und} \\ \cdot & : K \times X \rightarrow X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

erklärt, so dass $(X, +)$ eine abelsche Gruppe ist und für alle $\alpha, \beta \in K$ und $x, y \in X$ gilt:

- i) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
- ii) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
- iii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
- iv) $1 \cdot x = x$ (wobei 1 das bzgl. der Multiplikation neutrale Element von K bezeichnet).

Dann heißt X „Vektorraum über K “.

Wir werden in dieser Vorlesung grundsätzlich nur $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ betrachten, wofür wir auch $\mathbb{K}$ schreiben.

Beispiele für Vektorräume sind:

$\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ ($n \geq 1$),

$\mathbb{C}^n$ (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und

$l^2 := \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \mid \xi_i \in \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}), \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty\}$ (über $\mathbb{R}$ (oder über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)).

Auf Vektorräumen können wir nun Normen betrachten (vgl. den Absolutbetrag in $\mathbb{R}$):

Definition 5.5.2 Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

heißt „Norm auf X “, wenn gilt:

$$(i) \quad \forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(ii) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, x \in X : \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$(iii) \quad \forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

$(X, \|\cdot\|)$ heißt dann „normierter Raum“.

Bemerkung 5.5.3

Jeder normierte Raum wird mit $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+, (x, y) \mapsto d(x, y) := \|x - y\|$ zu einem metrischen Raum. In diesem Sinne sind Begriffe wie Cauchy-Folge, Vollständigkeit, ... zu verstehen.

Definition 5.5.4

Ein vollständiger normierter Raum heißt „Banachraum“.

Eine zusätzliche Struktur kann auf einem Vektorraum durch ein „Skalarprodukt“ gegeben sein.

Definition 5.5.5 Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

heißt „Skalarprodukt (kurz: SKP)“ oder „inneres Produkt“, wenn gilt:

$$(i) \quad \forall x, y, z \in X \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in X :$$

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \langle y, x \rangle & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \overline{\langle y, x \rangle} & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

$$(iii) \quad \forall x \in X : \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ und es gilt } : \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Beispiele sind:

$$\mathbb{R}^n \text{ mit } \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i,$$

$$\mathbb{C}^n \text{ mit } \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n \xi_i \overline{\eta_i} \text{ oder}$$

$$l^2 \text{ mit } \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i \text{ bzw. } \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta_i}.$$

Jeder Vektorraum mit SKP ist auch ein normierter Raum, wobei

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Zum Nachweis, dass die so definierte Abbildung die Dreiecksungleichung erfüllt, benötigen wir die Cauchy & Schwarzsche Ungleichung (Hermann Amandus Schwarz, 25.1.1843 – 30.11.1921):

Satz 5.5.6 (Cauchy & Schwarzsche Ungleichung)

Seien X ein Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein SKP. Dann gilt für alle $x, y \in X$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Beweis:

Sei o.B.d.A $y \neq 0$. Definiere $\alpha := \|y\|^2 > 0$, $\beta := -\langle x, y \rangle$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = |\alpha|^2 \|x\|^2 + \alpha \bar{\beta} \langle x, y \rangle + \bar{\alpha} \beta \langle y, x \rangle + |\beta|^2 \|y\|^2 \\ &= \|y\|^2 \{ \|y\|^2 \|x\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 \}, \text{ also ist} \end{aligned}$$

$$\|y\|^2 \cdot \|x\|^2 - |\langle x, y \rangle|^2 \geq 0.$$

Q.e.d.

Hilfssatz 5.5.7

Seien X ein Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein SKP. Dann ist die Abbildung

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \text{ eine Norm.}$$

Besonders interessant sind die „Hilberträume“ (David Hilbert, 23.1.1862 – 14.2.1943).

Definition 5.5.8

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt, der bezüglich der induzierten Norm ein Banachraum ist, heißt „Hilbertraum“.

Wir geben abschließend noch einige leicht zu beweisende Eigenschaften eines Skalarproduktes an:

Hilfssatz 5.5.9 Seien X ein Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf X und $\|\cdot\|$ die vom SKP induzierte Norm.

Dann gilt für alle $x, y \in X$:

1) Satz von Pythagoras (von Samos, $\approx 580 - 500$ v. Chr.):

$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2) Parallelogrammgleichung:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

3) Polarisation

$$a) \text{ für } \mathbb{K} = \mathbb{R} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

$$b) \text{ für } \mathbb{K} = \mathbb{C} : \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2).$$

6 Ergänzungen und Beispiele

6.1 Darstellung von Zahlen

Zum praktischen Hantieren mit den reellen Zahlen ist eine geeignete Darstellung besonders wichtig.

Zur Geschichte

Die ältesten Darstellungen erfolgten durch Steine, Perlen oder Knoten. Dabei war der Zahlbegriff noch nicht abstrakt gefasst. Die Babylonier benutzten etwa ab 2000 v. Chr. das Sexagesimalsystem (heute hat die Stunde noch 60 Minuten und der Kreis 360 Grad). Schon früh gab es Systeme zur Basis 10 (Dezimalsystem), 12 (heute noch: ein „Dutzend“) und 20 (vgl. frz. „quatre-vingts“). Es gab zur kürzeren Schreibweise Striche mit Fünferbündelung, bei den Griechen die Zeichen $\Delta=10$, $H=100$, $X=1000$ und bei den Römern $V=5$, $X=10$, $L=50$, $C=100$, $D=500$, $M=1000$. Ein wesentlicher Fortschritt gegenüber solchen Systemen wurde durch die Erfindung des Stellenwertsystems (der Babylonier) erreicht, das wir noch heute benutzen. Es gibt Einer, Zehner, Hunderter usw. Jetzt war auch das schriftliche Rechnen möglich. Die Ziffern 0-9 stammen von den Indern und wurden von den Arabern nach Europa gebracht.

Das Dezimalsystem

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ entsprechen den periodischen Dezimalbrüchen. So ist zum Beispiel $\frac{1}{7} = 0, \overline{142857}$.

Begründung:

Jeder Bruch entspricht einer periodischen Dezimalzahl, da sich nach endlich vielen Divisionen ein Rest wiederholen muss .

Sei umgekehrt $a = 0, \underbrace{a_1 a_2 \dots a_r}_{\triangleq A} \overbrace{b_1 b_2 \dots b_s}^{\triangleq B}$ eine periodische Dezimalzahl, also ist

$$a = 10^{-r} \{ A + B 10^{-s} (1 + 10^{-s} + 10^{-2s} + \dots) \}$$

$$= 10^{-r} \{ A + \frac{B}{10^s - 1} \},$$

und somit ist $a \in \mathbb{Q}$.

Wir schließen die Periode 9 aus, um die Mehrdeutigkeit $1 = 0, \overline{9}$ zu vermeiden.

Die Irrationalzahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entsprechen den nicht periodischen Dezimalbrüchen. An dieser Darstellung sieht man auch, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.

Das Dual- und das Hexadezimalsystem

Durch die Entwicklung moderner Computer sind Dualzahlen und Hexadezimalzahlen wichtig geworden, d.h. Darstellungen zur Basis 2, was den 2 möglichen Stellungen „ein“ oder „aus“ eines Schalters entspricht, und zur Basis $16 = 2^4$.

dezimal	dual	hexadezimal
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
15	1111	F
16	10000	10
17	10001	11
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Im Dualsystem hat man die einfachsten „Einsundeins-Tafeln“ bzw. „Einmaleins-Tafeln“, nämlich

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Beispiele 6.1.1 1) Die Multiplikation „ $7 \cdot 3$ “ schreibt sich im Dualsystem wie folgt:

$$\begin{array}{r}
 111 \cdot 11 \\
 \hline
 111 \\
 1110 \\
 \hline
 10101
 \end{array}$$

2) Die Division „ $1/3$ “ schreibt sich im Dualsystem

$$\begin{array}{r}
 1 \quad : 11 = 0, \overline{01} \\
 100 \\
 - \underline{11} \\
 1
 \end{array}$$

Die kleinste Informationseinheit (ein/aus bzw. ja/nein bzw. 0/1) heißt ein „bit“.

Es sind

1 byte := 8 bit

1 Kbyte := 2^{10} byte = 1024 byte : „Kilobyte“

1 Mbyte := 2^{20} byte = 1048576 byte : „Megabyte“.

6.2 Die Zahl e

Wir definieren $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Da $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1$ für $a_n := \frac{1}{n!}$ ist, konvergiert die Reihe (Quotientenkriterium).

Eine Berechnung liefert $e = 2,718281821459\dots$

Die Bezeichnung „ e “ stammt (ebenso wie die Bezeichnung „ π “) von Euler (Leonhard Euler, 15.4.1707-18.9.1783).

Satz 6.2.1

Die Zahl e ist irrational.

Beweis:

Sei $e = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} =: s_n + r_n$.

Es gilt die folgende „Restgliedabschätzung“:

$$\begin{aligned} 0 < r_n &\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^j} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} \\ &= \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < \frac{1}{n \cdot n!}, \end{aligned}$$

und somit die Fehlerabschätzung: $0 < e - s_n < \frac{1}{n \cdot n!}$.

Für $b_n := (e - s_n) \cdot n \cdot n!$ folgt also:

$0 < b_n < 1$ und $e = \frac{b_n}{n \cdot n!} + s_n$.

Annahme: e ist rational, d.h. $e = p/q$ für $p, q \in \mathbb{N}$.

Für $n := q$ ist somit

$$e = \frac{p}{q} = \frac{b_q}{q \cdot q!} + \sum_{j=0}^q \frac{1}{j!}.$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $q!$ ergibt

$$p \cdot (q-1)! = \frac{b_q}{q} + q! \sum_{j=0}^q \frac{1}{j!}.$$

Da $p \cdot (q-1)!$ und $q! \sum_{j=0}^q \frac{1}{j!}$ aus $\mathbb{N}$ sind, aber $\frac{b_q}{q} < 1$ ist, muss diese Gleichung falsch sein.

Q.e.d.

(Irrationale) Zahlen werden unterteilt in „algebraische“ und in „transzendente“ Zahlen.

Definition 6.2.2 1) Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_j \in \mathbb{Z}$ für $j = 1, \dots, n$ und $a_n \neq 0$. Dann heißt

$$P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto P_n(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

ein „Polynom n -ten Grades mit Koeffizienten a_j “.

- 2) Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt „algebraisch“, wenn es eine natürliche Zahl n und ein Polynom n -ten Grades gibt, so dass gilt: $P_n(x_0) = 0$.
- 3) Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt „transzendent“, wenn sie nicht algebraisch ist.

Beispiele 6.2.3 1) Alle rationalen Zahlen sind algebraisch, denn die rationale Zahl $x_0 = p/q$ ist Nullstelle des Polynoms $P_1(x) = qx - p$.

2) Die Zahl $\sqrt{2}$ ist Nullstelle des Polynoms $P_2(x) := x^2 - 2$ und ist somit algebraisch.

3) e (und π) sind transzendent.

Für e wurde diese Aussage von Charles Hermite (24.12.1822–14.1.1901), für π von Carl Louis Ferdinand von Lindemann (12.4.1852–6.3.1939) bewiesen.

7 Funktionen einer reellen Veränderlichen

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit Funktionen

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R};$$

wir ordnen ihnen Eigenschaften wie „Stetigkeit“ und „Differenzierbarkeit“ zu und beweisen Aussagen für Funktionen mit diesen Eigenschaften.

7.1 Stetige Funktionen

Wir hatten in Merkblatt 3 in Definition 3.14 „streng monotone Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ “ definiert. Für diese gilt:

Satz 7.1.1

Seien $S, T \subset \mathbb{R}$ und $f : S \rightarrow T$ eine streng monotone Funktion. Dann existiert f^{-1} und ist wiederum streng monoton.

Beispiele 7.1.2

1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto f(x) := x^2$ ist streng monoton fallend in $(-\infty, 0]$ und streng monoton wachsend in $[0, \infty)$.

2) Die Funktion

$$f : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 - x & \text{für } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

ist bijektiv, aber nicht monoton. Strenge Monotonie ist also nur ein hinreichendes, aber kein notwendiges Kriterium für die Umkehrbarkeit einer Funktion.

3) Die Sprungfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto [x]$, wobei $[x] := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z < x\}$ die „Gaußklammer von x “ bezeichnet, ist monoton, aber nicht streng monoton und nicht umkehrbar.

Wir werden uns in dieser Vorlesung mit verschiedenen Unterräumen des Vektorraums der Funktionen einer reellen Veränderlichen beschäftigen.

Definition 7.1.3 Seien $S, T \subset \mathbb{R}$ und $\mathcal{F}(S, T)$ die Menge aller Abbildungen $f : S \rightarrow T$. Wir erklären für $f, g \in \mathcal{F}(S, T)$:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ und}$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha \cdot f(x) \text{ für } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Damit wird $\mathcal{F}(S, T)$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Bevor wir den Unterraum der stetigen Funktionen einführen, wollen wir noch einige andere Beispiele für Unterräume angeben.

Beispiele 7.1.4

1) Die Menge

$$\mathcal{B}(S, T) := \{f \in \mathcal{F}(S, T) \mid \exists c = c(f) > 0 : \forall x \in S : |f(x)| \leq c\}$$

ist der Unterraum der „beschränkten Abbildungen“.

2) Die Menge

$$L(S, T) := \{f \in \mathcal{F}(S, T) \mid \exists c = c(f) > 0 \quad \forall x, y \in S : |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|\}$$

ist der Unterraum der „Lipschitz-beschränkten (oder: Lipschitz-stetigen)“ Funktion (benannt nach Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, 18.5.1832 – 7.10.1903).

3) Die Menge aller Polynome bildet einen Unterraum.

4) Die Menge aller monoton wachsenden Funktionen bildet keinen Unterraum.

Nun jedoch zum Unterraum der stetigen Funktionen:

Definition 7.1.5

$f \in \mathcal{F}(S, T)$ heißt „stetig in $x_0 \in S$ “ : $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in S, \quad |x - x_0| < \delta : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Bemerkung 7.1.6

Nach obiger Definition ist $f \in \mathcal{F}(S, T)$ „unstetig in $x_0 \in S$ “, wenn gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in S, \quad |x - x_0| < \delta : \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Beispiele 7.1.7

1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto f(x) := |x|$ ist stetig in allen $x_0 \in \mathbb{R}$, da $|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|$; wähle also $\delta := \varepsilon$.

2) Die „Heaviside-Funktion“ (nach: Oliver Heaviside, 18.5.1850 – 3.2.1925)

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto H := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

ist unstetig in $x_0 = 0$, denn für jedes $x < 0$, $|x| < \delta$ ist $|f(x) - f(x_0)| = 1$.

Der Punkt $x_0 = 0$ ist eine „Sprungstelle“ der Heaviside-Funktion.

3) Sei $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := \begin{cases} \sin 1/x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(wir werden die Sinus-Funktion später noch einmal definieren).

Wir zeigen die Unstetigkeit dieser Funktion in $x_0 = 0$.

Sei $x_n := \frac{2}{(2n+1)\pi}$ für n so groß, dass $|x_n| < \delta$ für ein gegebenes δ . Dann ist

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |\sin \frac{2n+1}{2}\pi| = 1.$$

Diese Funktion „oszilliert für $x \rightarrow 0$ “.

$$4) \text{ Sei } f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} 1/x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Die Funktion f ist unstetig in $x_0 = 0$; für $x \neq 0$ ist

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x}\right| \geq 1.$$

Im Punkt $x_0 = 0$ ist die Funktion f „singulär“.

Definition 7.1.8

Eine Funktion $f \in \mathcal{F}(S, T)$ heißt „stetig in S “, wenn sie in allen Punkten $x \in S$ stetig ist.

Schreibweise: $\mathcal{C}(S, T) := \mathcal{C}^0(S, T) := \{f \in \mathcal{F}(S, T) | f \text{ ist stetig in } S\}$.

$\mathcal{C}(S, T)$ ist mit der in Definition 7.1.3 erklärten Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum.

Wir gehen nun auf den Zusammenhang zwischen der Definition der Stetigkeit und des Grenzwertbegriffs ein.

Definition 7.1.9

Sei a ein Häufungspunkt von S und $f \in \mathcal{F}(S, T)$ oder $f \in \mathcal{F}(S \setminus \{a\}, T)$.

Dann heißt $b \in \overline{T}$ „Grenzwert von f an der Stelle a ($b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$)“ : $\Leftrightarrow$

$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in S \setminus \{a\}$ für alle n aus $\mathbb{N}$ und $x_n \rightarrow a$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$.

Bemerkung 7.1.10

In obiger Definition ist nicht gefordert, dass f in a definiert ist, insbesondere muss nicht gelten: $f(a) = b$.

Beispiel 7.1.11

$$\text{Sei } f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \neq 0 \\ 7 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0)$.

Außerdem ist $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 1$ der „linksseitige Grenzwert“; f ist in $x = 1$ nicht erklärt.

Es gilt der folgende Zusammenhang:

Satz 7.1.12

Sei $f \in \mathcal{F}(S, T)$. Dann gilt: f ist in $x_0 \in S$ stetig $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Beweis:

Zu beweisen ist nur etwas für den Fall, dass x_0 Häufungspunkt von S ist. Sei also x_0 HP von S .

„ $\Rightarrow$ “:

Sei $x_n \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, d.h. :

$\forall \delta > 0 \quad \exists n_0(\delta) \quad n_0 := n_0(\delta) \quad \forall n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \delta.$

Da f stetig in x_0 ist, gilt außerdem

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in S \text{ mit } |x - x_0| < \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle nun $n(\delta(\varepsilon))$ so groß, dass für alle $n \geq n(\delta(\varepsilon))$

$|x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$ ist, also $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Dies ist aber gerade die Behauptung.

„ $\Leftarrow$ “:

Annahme: f ist nicht stetig in x_0 , d.h.

$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, \quad x \neq x_0, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$

Für $\delta := \frac{1}{n}$ folgt hieraus: $\exists (x_n), \quad x_n \neq x_0, |x_n - x_0| < \frac{1}{n} : |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Q.e.d.

Der eben bewiesene Zusammenhang zwischen Stetigkeit und der Existenz eines Grenzwertes kann auch zur Definition einer stetigen Ergänzung einer Funktion genutzt werden.

Definition 7.1.13

Sei $f \in \mathcal{F}(S, T)$, sei $a \notin S$ ein Häufungspunkt von S und existiere $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =: f(a).$

Die fortgesetzte Funktion

$$\tilde{f} : S \cup \{a\} \rightarrow T, \quad x \mapsto \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in S \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) & \text{für } x = a \end{cases}$$

heißt „stetige Ergänzung“ der Funktion f . Existiert nur der Grenzwert für $x > a$ (bzw. $x < a$), so sprechen wir von einer „stetigen Ergänzung von rechts (bzw. von links)“.

Satz 7.1.12 liefert ein nützliches Stetigkeitskriterium. So sieht man sofort ein:

Hilfssatz 7.1.14

Seien $f \in \mathcal{F}(S, T)$ und $g \in \mathcal{F}(T, U)$, und sei f stetig in $x_0 \in S$ und g in $f(x_0) \in T$. Dann ist die Verknüpfung $g \circ f$ stetig in x_0 .

Wir beweisen nun einige allgemeingültige Aussagen über stetige Funktionen.

Satz 7.1.15

Seien $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Dann ist der Wertebereich $R(f)$ kompakt, insbesondere ist f also eine beschränkte Funktion.

Beweis:

i) Wir zeigen: $R(f)$ ist beschränkt.

Annahme: $R(f)$ ist unbeschränkt. d.h. insbesondere: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in K : |f(x_n)| > n.$

Wähle aus der Folge (x_n) eine gegen einen Grenzwert $x_0 \in K$ konvergente Teilfolge (x'_n)

aus, was wegen der Kompaktheit von K möglich ist.

Dann gilt für $n \geq n_0 := 2 + [|f(x_0)|]$:

$$|f(x'_n) - f(x_0)| \geq |f(x'_n)| - |f(x_0)| > n - |f(x_0)| \geq 1,$$

was im Widerspruch zur Stetigkeit von f in Punkt x_0 steht.

ii) Wir zeigen: $R(f)$ ist abgeschlossen.

Sei y_0 Häufungspunkt von $R(f)$; sei $(x_n), x_n \in K$, eine Folge mit $f(x_n) \rightarrow y_0$. Wähle aus dieser Folge eine gegen einen Grenzwert $x_0 \in K$ konvergente Teilfolge (x'_n) aus. Dann gilt für $n \rightarrow \infty$:

$$y_0 \leftarrow f(x'_n) \rightarrow f(x_0), \text{ d.h. } y_0 \in R(f).$$

Q.e.d.

Aus diesem Satz folgt sofort, dass eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihre Extremwerte annimmt.

Wir definieren:

Definition 7.1.16

Sei $f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ von oben (unten) beschränkt und sei $I \subset S$.

1) Dann heißt

$$\sup_{x \in I} f(x) := \sup\{y | \exists x \in I : y = f(x)\} \quad (\inf_{x \in I} f(x) := \inf\{y | \exists x \in I : y = f(x)\})$$

das „Supremum (Infimum) von f in I “.

2) Dann heißt

$$M := \max_{x \in I} f(x) \quad (m := \min_{x \in I} f(x))$$

das „Maximum (Minimum) von f in I “ wenn gilt:

$$i) M = \sup_{x \in I} f(x) \quad (m = \inf_{x \in I} f(x)) \text{ und}$$

$$ii) \exists x_0 \in I : f(x_0) = M \quad (f(x_0) = m).$$

Zur Illustration des Unterschieds zwischen einem Supremum und einem Maximum ein

Beispiel 7.1.17

$$\text{Sei } S := [0, 1] \text{ und } f : S \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \neq 0 \\ -1/2 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Dann ist

$\sup_{x \in S} f(x) = 0$, das Supremum wird jedoch nicht als Maximum angenommen, und

$$\inf_{x \in S} f(x) = \min_{x \in S} f(x) = -1.$$

Folgerung 7.1.18

Seien $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Dann existieren $\max_{x \in K} f(x)$ und $\min_{x \in K} f(x)$.

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort aus der Kompaktheit von $R(f)$.

Q.e.d.

Stetige Funktionen nehmen nicht nur ihre Extremwerte an, sondern auch alle Zwischenwerte.

Satz 7.1.19 (Zwischenwertsatz)

Seien $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.

Beweis:

Definiere $M := \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}$. Offensichtlich ist M eine nichtleere beschränkte Menge.

Sei $x_0 := \sup M$.

i) Annahme: $f(x_0) < 0$.

Wähle ε so, dass $0 < \varepsilon < -\frac{f(x_0)}{2}$ und $\delta(\varepsilon) > 0$ so, dass für $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist. Dann ist (insbesondere) für $\bar{x} := x_0 + \delta/2$:

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(x_0) + f(x_0) < \varepsilon + f(x_0) \leq \frac{f(x_0)}{2} < 0,$$

was im Widerspruch zur Definition von M steht.

ii) Annahme: $f(x_0) > 0$.

Dann existiert eine Folge $x_n \in M$ mit $x_n \rightarrow x$ und $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ für $n \rightarrow \infty$ und $f(x_n) < 0$; also muss $f(x_0) \leq 0$ sein, was der Annahme widerspricht.

Q.e.d.

In allgemeiner Formulierung lautet der Zwischensatz wie folgt:

Satz 7.1.20

Seien $I := [a, b]$, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < z < f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = z$.

Beweis:

Die Funktion g , definiert vermöge $g(x) := f(x) - z$ für $x \in I$, erfüllt die Voraussetzungen von Satz 7.1.19. Sei $x_0 \in (a, b)$ die Nullstelle von g ; dann ist $f(x_0) = z$.

Q.e.d.

Wir werden nun gleichmäßig stetige Funktionen definieren. Ein Beispiel für diese sind die Hölder-stetigen Funktionen (Otto Hölder, 22.12.1859 – 29.8.1937).

Definition 7.1.21

Eine Funktion $f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$ heißt „Hölder-stetig zum (mit) Hölderexponenten $\alpha \in (0, 1]$ “, wenn gilt:

$$\exists c > 0 \forall x, y \in S : |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

Schreibweise: $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(S, \mathbb{R})$.

Für $\alpha = 1$ erhalten wir den bereits bekannten Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen.

Definition 7.1.22

Eine Funktion $f \in \mathcal{C}(S, \mathbb{R})$ heißt „gleichmäßig stetig in S “

$$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0 \in S \forall x, |x - x_0| < \delta : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Beispiele 7.1.23

Sei $S := (0, 1)$.

1) Die Funktion $f, f(x) := x^2$ ist gleichmäßig stetig in S , denn:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq 2|x - x_0| < \varepsilon \text{ für } |x - x_0| < \delta := \frac{\varepsilon}{3}.$$

2) Die Funktion $f, f(x) := \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig in S .

Beweis:

Zu zeigen ist: $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in S, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Wähle $\varepsilon := 1, n \geq \frac{1}{\delta}, x_n = \frac{1}{n}, y_n := \frac{1}{2n}$; dann ist $|x_n - y_n| = \frac{1}{2n} < \delta$

und $|f(x_n) - f(y_n)| = n \geq 1$.

Für gleichmäßig stetige Funktionen gilt:

Satz 7.1.24

Sei die Funktion $f : S \rightarrow T$ gleichmäßig stetig. Dann kann sie stetig auf $\bar{S}$ fortgesetzt werden.

Beweis:

Seien $a \notin S$ ein Häufungspunkt von S und $(x_n), x_n \in S$, eine Folge mit $x_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$.

i) Beh: $f(a) := \lim_n f(x_n)$ existiert.

Bew:

Da (x_n) konvergiert und f gleichmäßig stetig ist, gilt:

$$\forall \delta > 0 \exists n_1(\delta) \forall n, m \geq n_1(\delta) : |x_n - x_m| < \delta \text{ und}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall x_n, x_m \in S, |x_n - x_m| < \delta(\varepsilon) : |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \text{ also}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) : |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \text{für } n_0(\varepsilon) := n_1(\delta(\varepsilon)).$$

ii) Beh: f ist in $\bar{S}$ wohldefiniert.

Bew:

Seien (x_n) und (x_n^*) Folgen in S mit $x_n \rightarrow a \leftarrow x_n^*$ und $f(x_n^*) \rightarrow b^*$, $f(x_n) \rightarrow b$ für $n \rightarrow \infty$.

Dann ist

$$|b - b^*| \leq |b - f(x_n)| + |f(x_n^*) - f(x_n)| + |f(x_n) - b^*| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Die Stetigkeit von f in a ist klar.

Q.e.d.

Umgekehrt gilt auch:

Satz 7.1.25

Seien $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Dann ist f gleichmäßig stetig in K .

Beweis:

Annahme: f ist nicht gleichmäßig stetig, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in K, \quad |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Somit existieren für $\delta := \frac{1}{n}$ Zahlen $x_n, y_n \in K$ mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ und } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Wähle konvergente Teilfolgen (x'_n) und (y'_n) aus, die gegen den Grenzwert $z \in K$ konvergieren (dies ist möglich aufgrund der Kompaktheit von K).

Definiere nun für $n \in \mathbb{N}$: $z_{2n-1} := y'_n$, $z_{2n} := x'_n$. Dann gilt $z_n \rightarrow z$ für $n \rightarrow \infty$ und

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \quad \exists n, m \geq n_0 : |f(z_n) - f(z_m)| \geq \varepsilon,$$

nämlich z.B. $n := n_0$, $m := n_0 + 1$.

Das bedeutet aber, dass $(f(z_n))$ keine Cauchy-Folge ist, was der Stetigkeit von f widerspricht.

Q.e.d.

Nun soll die Stetigkeit der Umkehrabbildung einer stetigen Funktion untersucht werden.

Wir hatten in Satz 7.1.1 bereits das hinreichende Kriterium der strengen Monotonie für die Existenz einer Umkehrfunktion gefunden. Für stetige Funktionen gilt auch die Umkehrung:

Satz 7.1.26

Ist $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ injektiv, so ist f streng monoton.

Beweis:

Sei o.B.d.A. $f(a) < f(b)$. Dann ist $f(a) = \min_{[a, b]} f$, denn wenn es ein $c \in [a, b]$ gäbe mit $f(c) < f(a)$, so gäbe es nach dem Zwischenwertsatz ein $d \in [c, b]$ mit $f(d) = f(a)$, was der Injektivität der Funktion widerspräche.

Wenn es nun $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, mit $f(x_1) \geq f(x_2)$ gäbe, so würde wiederum ein $z \in [a, x_1]$ existieren mit $f(z) = f(x_2)$, was der Injektivität der Funktion widerspräche.

Q.e.d.

Für die Umkehrabbildung einer stetigen Funktion gilt nun:

Satz 7.1.27

Seien $S \subset \mathbb{R}$ offen und $f \in \mathcal{C}(S, \mathbb{R})$ eine injektive Funktion. Dann ist die Abbildung $f^{-1} : R(f) \rightarrow S$ stetig.

Beweis:

i) Sei zunächst S kompakt.

Annahme: f^{-1} ist nicht stetig in $y_0 = f(x_0)$.

Wähle dann $y_n = f(x_n) \in R(f)$ so, dass $|y_n - y_0| < \frac{1}{n}$ und $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)| \geq \varepsilon$ für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ ist. Wähle aus $(x_n) = f^{-1}(y_n)$ eine konvergente Teilfolge (x'_n) aus; sei $x \in S$ ihr Grenzwert. Es ist $x \neq x_0$, da $|x'_n - x_0| \geq \varepsilon$, aber $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = y_0 = f(x_0)$, was der Injektivität der Funktion widerspricht.

ii) Sei nun S offen.

Zu $y_0 = f(x_0) \in R(f)$ wähle $[a, b] \subset S$ mit $x_0 \in (a, b)$. Es folgt die Stetigkeit von f^{-1} im Punkt y_0 aus dem ersten Teil des Beweises.

Zum Abschluss dieses Abschnittes über stetige Funktionen geben wir noch eine zur Stetigkeit äquivalente Bedingung an (die häufig auch zur Definition von Stetigkeit benutzt wird).

Satz 7.1.28

Sei $S \subset \mathbb{R}$ offen und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

1) $f \in \mathcal{C}(S, \mathbb{R})$.

2) $U \subset \mathbb{R}$ offen $\Rightarrow f^{-1}(U)$ ist offen.

Beweis:

„1 $\Rightarrow$ 2“:

Seien $U \subset \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in f^{-1}(U)$ und $y_0 \in U$ mit $f(x_0) = y_0$. Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $B(y_0, \varepsilon) \subset U$ ist. Aus der Stetigkeit von f folgt:

$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta) : f(x) \in B(y_0, \varepsilon)$ und $B(x_0, \delta) \subset S$.

Also ist $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U)$, und somit ist $f^{-1}(U)$ offen.

„2 $\Rightarrow$ 1“:

Seien $y_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$ nach Voraussetzung offen. d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x_0 \in f^{-1}(B(y_0, \varepsilon)) \quad \exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(y_0, \varepsilon))$.

Also gilt: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta) \cap S : f(x) \in B(y_0, \varepsilon)$.

Dies ist aber gerade die Definition von Stetigkeit.

Q.e.d.

7.2 Funktionenfolgen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Funktionenfolgen und untersuchen, inwieweit sich die Eigenschaften der Glieder einer konvergenten Funktionenfolge auf die Grenzfunktion übertragen.

Nach Definition 3.1 ist eine „Funktionenfolge“ eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $n \mapsto f_n$, wobei $D \subset \mathbb{R}$ sei.

Wir unterscheiden punktweise und gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge:

Definition 7.2.1

- 1) $(f_n)_n$ heißt „in D punktweise konvergent“ oder einfach „konvergent“ : $\Leftrightarrow$
 $\forall x \in D : f_n(x)$ konvergiert in D .
- 2) $(f_n)_n$ heißt „in D (punktweise) konvergent gegen die Grenzfunktion $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ “ $\Leftrightarrow$
 $\forall x \in D : f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Beispiele 7.2.2

- 1) Seien $D := [0, 1]$ und $f_n(x) := x^n$ für $x \in D$.

Dann konvergiert $(f_n)_n$ punktweise gegen

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{für } x = 1 \end{cases}.$$

- 2) Seien $D := [0, 2]$ und $f_n(x) := \begin{cases} nx & \text{für } 0 \leq x < 1/n \\ 2 - nx & \text{für } 1/n \leq x < 2/n \\ 0 & \text{für } 2/n \leq x \leq 2 \end{cases}.$

(f_n) konvergiert punktweise gegen $f(x) := 0$ für $x \in D$.

Definition 7.2.3 $(f_n)_n$ heißt „in D gleichmäßig (Cauchy-) konvergent“ : $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Analog wird die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge gegen eine Funktion f definiert.

Beispiele 7.2.4

- 1) Seien D, f_n und f wie in 1) in 7.2.2. Die Konvergenz der Funktionenfolge gegen f ist nicht gleichmäßig.

Beweis:

Zu zeigen ist: $\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n, m \geq n_0 \exists x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon$.

Wähle $\varepsilon := \frac{1}{4}$, $n = n_0$, $m = 2n_0$ und $x := (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n_0}}$.

Dann ist $|f_n(x) - f_m(x)| = |x^n - x^m| = |(\frac{1}{2})^1 - (\frac{1}{2})^2| = \frac{1}{4} \geq \varepsilon$.

2) Seien D, f_n und f wie in 2) in 7.2.2. Auch diese Konvergenz ist nicht gleichmäßig, denn für $\varepsilon := 1, n := n_0, m := 2n_0$ und

$$x := \frac{1}{n_0} \text{ gilt : } |f_n(x) - f_m(x)| = |1 - 0| = 1 \geq \varepsilon.$$

3) Seien $D := \mathbb{R}$ und $f_n(x) := \frac{x^2}{1+nx^2}$ für $x \in D$. Dann ist für alle $x \in D : |f_n(x)| = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+n} \leq \frac{1}{n}$, was impliziert:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in D : |f_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \text{ für } n_0 \geq \frac{2}{\varepsilon};$$

somit konvergiert die Funktionenfolge gleichmäßig gegen $f(x) := 0$ für $x \in D$.

4) Seien $D := \mathbb{R}$ und $f_n(x) := \begin{cases} x^n & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ für $x \in D$.

$$(f_n) \text{ konvergiert gleichmäßig gegen } f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases},$$

denn für beliebiges $x \in D$ ist

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0(\varepsilon).$$

Die Beispiele zeigen, dass die Stetigkeit der Glieder einer konvergenten Funktionenfolge nicht zu gleichmäßiger Konvergenz führt. Wenn eine Folge stetiger Funktionen gleichmäßig konvergiert, so bedingt dies jedoch die Stetigkeit der Grenzfunktion, wie wir beweisen werden.

Definiere für $f \in \mathcal{B}(D, \mathbb{R})$:

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Hilfssatz 7.2.5

Die Abbildung

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(D, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad f \mapsto \|f\|_\infty.$$

ist eine Norm; somit ist $(\mathcal{B}(D, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum mit $\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$.

Die gleichmäßige (Cauchy-) Konvergenz einer Funktionenfolge schreibt sich somit wie folgt:

Satz 7.2.6

Sei $(f_n)_n, f_n \in \mathcal{B}(D, \mathbb{R})$, eine Funktionenfolge. Dann gilt: $(f_n)_n$ ist gleichmäßig Cauchy-konvergent

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, m \geq n_0 : \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Analoges gilt für gleichmäßige Konvergenz.

Für Folgen aus $\mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ gilt nun speziell:

Satz 7.2.7

Sei $(f_n)_n, f_n \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ eine gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ konvergente Funktionenfolge. Dann ist $f \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$.

Beweis:

Seien $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in D$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in D$, was wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz möglich ist. Da die Funktionen f_n insbesondere in x_0 stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$ so dass für $x \in D$ $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$.

Das heißt also: $\forall x_0 \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, |x - x_0| < \delta :$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Q.e.d.

Ebenso beweist man:

Satz 7.2.8

Seien $f_n \in \mathcal{C}(D, \mathbb{R})$ gleichmäßig stetige Funktionen und konvergiere $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Dann ist f eine gleichmäßig stetige Funktion.

Insbesondere folgt hieraus:

Folgerung 7.2.9

Für $K \subset \mathbb{R}$ kompakt ist $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ vollständig.

Bemerkung 7.2.10

Auch der Raum $\mathcal{B}(D, \mathbb{R})$ ist vollständig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Eine spezielle Art von Funktionenfolgen bilden die Reihen mit Funktionen als Summanden; wir werden diese im 9. Kapitel ausführlich diskutieren.

Wir wollen hier nur kurz andeuten, wie sich die bekannten Ergebnisse übertragen lassen.

Sei also $(f_n)_n$ eine Funktionenfolge, $f_n \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, und $s_n := \sum_{j=1}^n f_j$ die n-te Partialsumme.

Offensichtlich ist $s_n \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Die Reihe $\sum_{j=1}^\infty f_j$ konvergiert genau dann, wenn $(s_n)_n$ punktweise konvergiert; die Reihe $\sum_{j=1}^\infty f_j$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn $(s_n)_n$ gleichmäßig konvergiert.

Es gilt:

Satz 7.2.11

Seien $f_n \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f_n\|_\infty \leq c_n$. Dann gilt: Wenn $\sum_{n=1}^\infty c_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig.

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei Beispielen.

Beispiele 7.2.12

- 1) Sei $\zeta(x) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x}$, $x > 1$, die „Riemannsche Zetafunktion“ (Bernhard Georg Friedrich Riemann, 17.9.1826 – 20.7.1866). Die Reihe konvergiert gleichmäßig in jeder Menge

$D_c := \{x \mid x \geq c\}$ für $c > 1$, denn:

$\forall x \in D_c : \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^c} =: c_n$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{n^c} \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \cdot \frac{1}{2^{cj}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{c-1})^j} = \frac{2^{c-1}}{2^{c-1}-1} < \infty.$$

In $(1, \infty)$ liegt punktweise aber keine gleichmäßige Konvergenz vor, in $x = 1$ divergiert die Reihe.

2) Potenzreihen (vgl. Kapitel 9)

Potenzreihen haben die Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

Es existiere $a := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Definiere $r = 1/a$ für $a \neq 0$ und $r := \infty$ für $a = 0$.

Dann gilt:

i) $\sum a_n x^n$ konvergiert absolut für $x \in B(0, r)$.

ii) $\sum a_n x^n$ konvergiert absolut und gleichmäßig für $x \in B(0, c)$ für $0 \leq c < r$.

Beweis:

zu i) Sei $x \in B(0, r)$ und $\varepsilon := \frac{1}{|x|} - a > 0$.

Wähle $n_0(\varepsilon)$ so groß, dass für alle $n \geq n_0$: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq a + \varepsilon$.

Dann gilt für $n \geq n_0$: $\sqrt[n]{|a_n \cdot x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} \leq |x|(a + \varepsilon) \leq \frac{a+\varepsilon}{a+2\varepsilon} < 1$.

Die absolute Konvergenz der Reihe folgt nun aus dem Wurzelkriterium.

zu ii) Für $x \in B(0, c)$ mit $c < r$ ist $|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot c^n$.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| c^n$ konvergiert nach i).

7.3 Elementare Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir uns mit der Exponentialfunktion, dem Sinus, dem Cosinus, mit deren Umkehrfunktionen und mit den Hyperbelfunktionen beschäftigen.

Die Exponentialfunktion und der Logarithmus

Die Exponential- (oder e-)Funktion ist bereits definiert worden als

$$e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Hilfssatz 7.3.1

i) Die Reihe $e(x)$ konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem Intervall $[-R, R]$.

ii) Es ist $e(0) = 1$ und $e(1) = e$.

iii) Die Funktion $x \mapsto e(x)$ ist stetig in $\mathbb{R}$.

Beweis:

zu i) Für $|x| < R$ ist

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} / \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|}{n+1} \leq \frac{R}{n+1} \leq \frac{1}{2} < 1 \text{ für } n \geq 2R,$$

und somit ist das Quotientenkriterium anwendbar.

zu iii) Die Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ sind stetige Funktionen, und somit folgt die Behauptung aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihen auf jeden beliebigen Intervall $[-R, R]$.

Q.e.d.

Satz 7.3.2 (Additionstheorem)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e(x)e(y) = e(x+y).$$

Aus dem Additionstheorem folgt:

Folgerung 7.3.3

Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt: $e^x = e(x)$, und mit $e^x := e(x)$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wird $x \mapsto e^x$ eine stetige Funktion.

Beweis:

Zunächst folgt aus dem Additionstheorem direkt:

$$e(n) = e^n \text{ und } e(-n) = e^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ da } e(-n) \cdot e(n) = e(0) = 1.$$

Da $(e(\frac{1}{n}))^n = e(1) = e$ ist, ist auch $e(\frac{1}{n}) = e^{\frac{1}{n}}$. Hieraus folgt die Behauptung für alle rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$.

Q.e.d.

Die e -Funktion $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto e^x$ ist streng monoton wachsend und $R(e) = \mathbb{R}^+$. Ihre Umkehrfunktion

$$\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \ln y := x \quad \text{mit } e^x = y$$

heißt „Logarithmus naturalis“ oder „Logarithmus zur Basis e “. Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir $a^x := e^{x \ln a}$. Allgemein bezeichnet der „Logarithmus zur Basis a “ für $a > 0$ die Umkehrfunktion der Abbildung $x \mapsto a^x$, d.h. für $a > 0$:

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \log_a y := x \text{ mit } a^x = y.$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

Hilfssatz 7.3.4 Seien $a, b, y, y_1, y_2, \alpha \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

$$i) \quad \log_a(y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2.$$

$$ii) \quad \log_a(y^\alpha) = \alpha \log_a y$$

$$iii) \quad \log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a}.$$

Die Exponentialfunktion kann auch auf $\mathbb{C}$ erklärt werden:

$$e : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto e(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Wie zuvor konvergiert die Reihe gleichmäßig auf jeder beschränkten Kugel $B(0, R) \subset \mathbb{C}$. e ist eine auf $\mathbb{C}$ stetige Funktion und für $z = x + iy$ gilt: $e^z = e^x e^{iy}$, wobei

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ist.

Sinus und Cosinus

Definiere die Funktionen $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} c(y) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} & \text{und} \\ s(y) &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} & \text{für } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir werden zeigen, dass diese Funktionen den klassischen Funktionen Sinus bzw. Cosinus entsprechen.

Hilfssatz 7.3.5

Die Funktionen s und c sind stetig und haben die folgenden Eigenschaften: $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

- i) $c(0) = 1$, $s(0) = 0$
- ii) $c(-x) = c(x)$, $s(-x) = -s(x)$
- iii) $c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)$, $s(x+y) = s(x)c(y) + s(y)c(x)$
- iv) $c^2(x) + s^2(x) = 1$

Wir erinnern an die klassischen Funktionen Sinus und Cosinus:

Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $x + iy \in \mathbb{C}$) in der „Gaußschen Zahlenebene“ bezeichne φ den Winkel zwischen den Vektoren (x, y) und $(1, 0)$. Der Winkel wird traditionell in Grad gemessen, d.h. $(0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ)$ (zum Bogenmaß s. unten). Bezeichne $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ die Länge des Vektors (x, y) . Dann definiere $\sin \varphi := \frac{y}{r}$ und $\cos \varphi := \frac{x}{r}$.

Wir werden jedoch — wenn nicht ausdrücklich anders gesagt — die Winkel im Bogenmaß messen. Bezeichne $\pi = 3,1415\dots$ den „Inhalt“ des Einheitskreises und sei

$$s := \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot \varphi = 2|G_\varphi| \text{ der „Bogenlängenparameter“,}$$

wobei $|G_\varphi|$ den „Inhalt“ des Kreissektors

$$G_\varphi := \{(r, \psi) \mid 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \psi \leq \varphi\}$$

ist.

Für $r = 1$ ist also $\cos(2|G_\varphi|) = x$, $\sin(2|G_\varphi|) = y$, und somit $\cos s = \frac{x}{r}$ und $\sin s = \frac{y}{r}$.

Man kann nun mit klassischen geometrischen Argumenten zeigen, dass die Funktionen $\sin$ und $\cos$ stetig sind und die Eigenschaften i) - iv) aus Hilfssatz 7.3.5 besitzen.

Wir wollen nun die Funktionen $\cos$ und $\sin$ mit c bzw. s identifizieren.

Die Reihenentwicklung von $c(x)$ zeigt, dass

$$\begin{aligned} c(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) + \dots \geq \frac{1}{2} > 0 \text{ für } x \in [0, 1] \text{ und} \\ c(2) &= \left(1 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^4}{4!}\right) - \left(\frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!}\right) - (\dots) \dots \\ &= -\frac{1}{3} - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{4}{7 \cdot 8}\right) - \frac{2^{10}}{10!}(\dots) \dots \\ &< 0 \end{aligned}$$

ist, so dass c in $(1,2)$ (c ist stetig, der Zwischenwertsatz ist anwendbar) eine Nullstelle haben muss.

Sei $\alpha := \inf\{x > 0 \mid c(x) = 0\}$; dann ist α die kleinste positive Nullstelle, und es ist $1 < \alpha < 2$.

Nun ist $s(2\alpha) = 2s(\alpha)c(\alpha) = 0$ und $s(\alpha) = 1$, denn:

$s(\alpha) \in \{1, -1\}$, da $s^2(\alpha) = 1$ ist, und für $0 < x \leq 2$ ist

$$\begin{aligned} s(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \dots \\ &= x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \dots \\ &> 0. \end{aligned}$$

Für $\xi := \frac{2k+1}{2^n}$, $k, n \in \mathbb{N}$ beliebig, gilt:

$$c(\xi\alpha) = \cos\left(\xi\frac{\pi}{2}\right) \text{ und } s(\xi\alpha) = \sin\left(\xi\frac{\pi}{2}\right);$$

dies beweist man mit Hilfe der Additionstheoreme und vollständiger Induktion.

Da die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists k, n \in \mathbb{N} : x = \frac{2k+1}{2^n}\}$ dicht in $[0, \infty)$ liegt, folgt hieraus, da die Funktionen stetig sind:

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : c(\alpha x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad s(\alpha x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Die gewünschte Identifizierung ist bewiesen, wenn wir nun noch zeigen:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

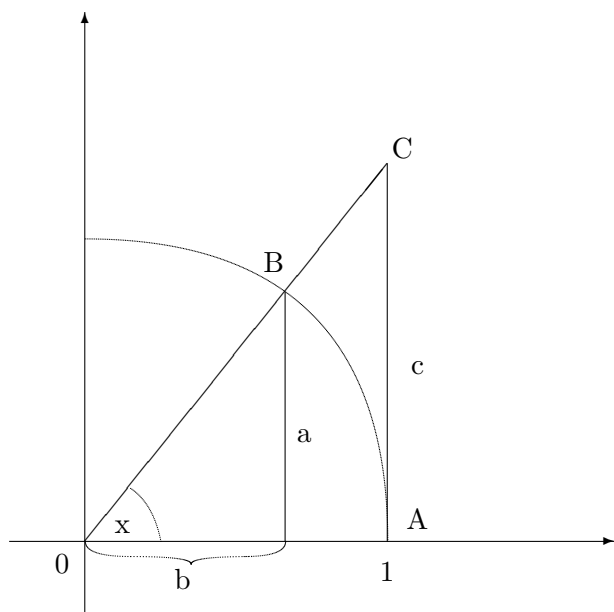
Dies wird folgen aus

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{s(\alpha x)}{x} = \alpha \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Ersteres folgt aus der Reihenentwicklung von s :

$$s(\alpha x) = \alpha x + xG(x) \text{ mit } G \text{ stetig, } G(0) = 0.$$

Letzteres folgt aus elementaren geometrischen Überlegungen:



Es gilt:

$$a = \sin x, b = \cos x \text{ und } \frac{c}{1} = \frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ (Strahlensatz),}$$

und für die Flächeninhalte:

$$|\Delta(0AB)| < |\text{Sektor } (0AB)| < |\Delta(0AC)|$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} < \frac{x}{2} < \frac{c}{2} \quad \Leftrightarrow \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{x} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{(\frac{\pi}{2}x)} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Somit ist $c(x) = \cos x$, $\sin x = s(x)$ und insbesondere gilt:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \text{ (vgl. Definition der Exponentialfunktion auf } \mathbb{C} \text{)}.$$

Aus dem Additionstheorem für die Exponentialfunktion kann man nun die Moivreschen Formeln (Abraham de Moivre, 26.5.1667 – 27.11.1754) herleiten:

$$\begin{aligned} \cos(n\varphi) &= \operatorname{Re}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n \\ &= \cos^n \varphi \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi \pm \dots \\ \sin(n\varphi) &= \operatorname{Im}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n \\ &= n \cos^{n-1} \varphi \cdot \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \cdot \sin^3 \varphi \pm \dots \end{aligned}$$

Die Zahl $\frac{\pi}{2}$ kann als kleinste positive Nullstelle der Funktion $c(x)$ mit Hilfe einer Iteration berechnet werden, deren Konvergenz man mit dem Banachschen Fixpunkt (vgl. Satz 5.2.11) zeigt. $T : x \in [1, 2] \mapsto T(x) := x + \frac{c(x)}{s(x)} \in \mathbb{R}$ ist eine kontrahierende Selbstabbildung des vollständigen metrischen Raumes $([1, 2], |\cdot|)$, und hat als einzigen Fixpunkt die Nullstelle von c .

Mit dem Startwert $x_0 = 1,5$ erhält man $\frac{\pi}{2}$ schon in zwei Schritten mit einer Genauigkeit von 10^{-7} , $\pi = 3,14159265\dots$

Die Umkehrfunktion

Die Funktionen $\sin$ und $\cos$ sind periodisch, also nicht injektiv und somit nicht invertierbar. Aber die auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ eingeschränkte Sinus-Funktion ist z.B. invertierbar; ihre Umkehrfunktion heißt „arc sin“. Entsprechend verfährt man mit $\cos$, $\tan$, $\dots$

Die Hyperbelfunktion

Wir wollen zum Abschluss noch die „Hyperbelfunktionen“ einführen (in Analogie zu den „Kreisfunktionen“ Sinus und Cosinus).

Definiere:

$\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ „cosinus hyperbolicus“ und

$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ „sinus hyperbolicus“.

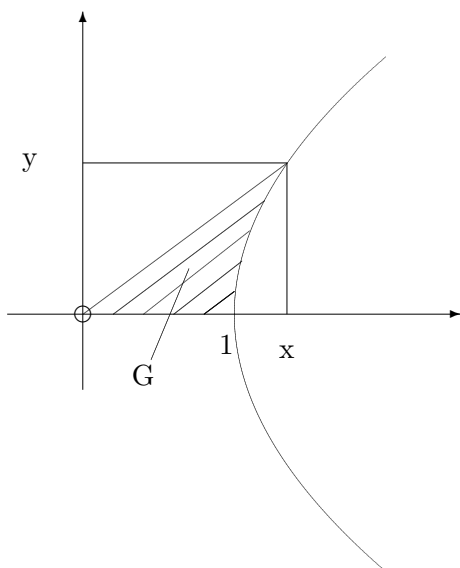
Es ist

$\cosh x = \cos(ix)$ und $\sinh x = -i \sin(ix)$, und somit $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Der Name der Funktion rührt daher, dass die Punkte $(\cosh x, \sinh x)$ auf einer Hyperbel liegen (die Punkte auf einer Hyperbel haben die Gestalt $(x, \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$).

Außerdem gilt hier, ähnlich wie bei der Beschreibung des Winkels φ im Einheitskreis durch den Bogenlängenparameter s bzw. dem Inhalt des Kreissektors G für $\cos$ und $\sin$:

$x = \cosh(2|G|)$ bzw. $y = \sinh(2|G|)$, wobei G wie im folgenden Bild:



Dies lässt sich wie folgt berechnen (die Integrationstheorie wird später behandelt werden):

$$|G| = \frac{y(x)}{2}x - \int_1^x y(s)ds = \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\Rightarrow e^{2|G|} = x + y(x) \Rightarrow \cosh(2 \cdot |G|) = \frac{1}{2}(x + y(x) + \frac{1}{x+y(x)}) = x.$$

7.4 Differenzierbare Abbildungen

Differenzierbarkeit oder k-fache Differenzierbarkeit sind Eigenschaften, die stetige Funktionen haben können. Je öfter eine Funktion differenzierbar ist, desto „glatter“ oder „regulärer“ ist sie.

Definition 7.4.1

Seien $I \subset \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in I$ und $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. f heißt „in x_0 differenzierbar“ : $\Leftrightarrow$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ existiert.}$$

Wir schreiben dann: $f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ oder auch $\frac{df(x)}{dx_0} := f'(x_0)$

Ist f für alle $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt f „in I differenzierbar“.

Bemerkung 7.4.2

- 1) Der Ausdruck $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ beschreibt die Steigung der Geraden, auf der die Punkte $f(x_0+h)$ und $f(x_0)$ liegen. Der Grenzwert $f'(x_0)$ entspricht somit der Steigung der Tangente an die Funktion f im Punkt x_0 .
- 2) Wenn $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von I ist, dann definieren wir entsprechend auch links- und rechtsseitige Differenzierbarkeit.

Beispiele 7.4.3

- 1) Seien $I = \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$. f ist differenzierbar in $\mathbb{R}$, da gilt:

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} h^j x^{n-j} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} h^{j-1} x^{n-1}$$

und somit ist

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n \cdot x^{n-1} = f'(x).$$

- 2) Seien $I = \mathbb{R}$ und $f(x) = e^x$. Dann ist

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h^{j-1}}{j!} = e^x \left(1 + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{h^{j-1}}{j!}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} e^x = (e^x)'.$$

Ebenso zeigt man:

$$\frac{e^{i(x+h)} - e^{ix}}{h} = e^{ix} \frac{e^{ih} - 1}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} i e^{ix}$$

und erhält $(\cos x)' = \sin x$ und $(\sin x)' = \cos x$.

- 3) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto |x|$ ist im Nullpunkt nicht differenzierbar:

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} -\frac{h}{h} = -1.$$

Die Funktion ist aber links- und rechtsseitig differenzierbar in x_0 .

Satz 7.4.4

Sei $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ in $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann ist f auch stetig in x_0 .

Insbesondere werden wir uns für stetig differenzierbare Funktionen interessieren:

Definition 7.4.5 Sei $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ differenzierbar in $\mathbb{R}$ und sei $f' \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Dann heißt f „stetig differenzierbar in I “. Den Raum der stetig differenzierbaren Funktionen in I bezeichnen wir mit $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

$\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ ist wieder ein Vektorraum, und es gilt:

Satz 7.4.6 Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$(i) \quad (f + g)' = f' + g'$$

$$(ii) \quad (f \cdot g)' = f'g + fg'$$

$$(iii) \quad \forall x, g(x) \neq 0 : \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \quad .$$

Beweis:

Alle Aussagen folgen aus den Grenzwertsätzen. Zum Beweis von (iii) benutzen wir, dass g als differenzierbare Funktion auch stetig ist, und somit aus $g(x) \neq 0$ folgt, dass g auch in einer Umgebung von x nicht verschwindet.

Beispiel 7.4.7

Sei für $x \in \mathbb{R}$

$$g_1(x) := \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Die Funktion g_1 ist in $x_0 = 0$ nicht stetig und somit auch nicht differenzierbar.

Die Funktion $g_2, g_2(x) := x \cdot g_1(x)$ ist stetig in $x_0 = 0$, aber nicht differenzierbar, denn:

für $h_n := \frac{1}{n}$ existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_2(h_n)}{h_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n \cdot \pi)$ nicht.

Die Funktion, $g_3(x) := x^2 \cdot g_1(x)$, ist jedoch in $x_0 = 0$ differenzierbar:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_3(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sin \frac{\pi}{h} = 0, \text{ da } |\sin \frac{\pi}{h}| \leq 1.$$

Also ist $g_3'(0) = 0$.

Für $x \neq 0$ ist $g_3'(x) = 2x \cdot \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x}$.

Somit ist g_3' nicht stetig in $x_0 = 0$ und also nicht stetig differenzierbar.

Wir werden nun noch ein Beispiel geben für eine Funktion, die in $\mathbb{R}$ stetig, aber nirgendwo in $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Beispiel 7.4.8

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{10^n x\}}{10^n}$,

wobei $\{ \} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1/2], x \mapsto \{x\} := \min_{z \in \mathbb{Z}} |x - z|$ ist, liegt in $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ist aber nirgends differenzierbar.

Beweis:

Die Reihe ist gleichmäßig und absolut konvergent, da

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\{10^n x\}}{10^n} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/10} = \frac{5}{9}$$

und somit ist die Funktion f stetig.

Sei $x \in [0, 1)$ eindeutig als Dezimalzahl geschrieben:

$$x = 0, x_1, x_2 \dots$$

Dann ist

$$\{10^n x\} = \begin{cases} 0, x_{n+1}x_{n+2} & \text{für } 0, x_{n+1}x_{n+2} \dots \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 0, x_{n+1}x_{n+2} \dots & \text{für } 0, x_{n+1}x_{n+2} \dots < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Seien

$$\varepsilon_m := \begin{cases} -1 & \text{falls } x_m = 4 \text{ oder } x_m = 9 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $h_m := \frac{\varepsilon_m}{10^m}$.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist} \quad s_m &:= \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} \\ &= \frac{10^m}{\varepsilon_m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\{10^n(x + h_m)\}}{10^n} - \frac{\{10^n x\}}{10^n} \right] \\ &= \frac{10^m}{\varepsilon_m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} [\{10^n x + 10^{n-m} \cdot \varepsilon_m\} - \{10^n x\}] \\ &= \frac{10^m}{\varepsilon_m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} \begin{cases} 0 & \text{für } n \geq m \\ +10^{n-m} \text{ oder } -10^{n-m} & \text{für } n < m \end{cases} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} a_n \quad \text{mit } a_n \in \{\pm 1\}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$s_1 = a_0 \in \{-1, +1\}$, $s_2 = a_0 + a_1 \in \{-2, 0, 2\}$, $s_3 = a_0 + a_1 + a_2 \in \{-3, -1, 1, 3\}$ usw.; es gilt: s_{2m} ist eine gerade Zahl und s_{2m+2} ist eine ungerade Zahl. Hieraus folgt die Divergenz von s_m , was die Nicht-Existenz von $f'(x)$ bedeutet.

Bei Verknüpfung oder Invertierung (falls möglich) überträgt sich die Differenzierbarkeit:

Satz 7.4.9 Seien $S, T, U \subset \mathbb{R}$ offen, $f : S \rightarrow T$, $g : T \rightarrow U$ Abbildungen und seien f in $x_0 \in S$ und g in $t_0 := f(x_0) \in T$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt:
 $(g \circ f)'(x_0) = (g' \circ f)(x_0) \cdot f'(x_0)$.

Beweis:

Es ist $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r_f(x_0, h)h$

mit $r_f(x_0, h) := (f(x_0 + h) - f(x_0))/h - f'(x_0)$ für $h \neq 0$ und $r_f(x_0, 0) := 0$.

Wegen der Differenzierbarkeit von f in x_0 gilt $r_f(x_0, h) \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.

Es folgt:

$$g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))f'(x_0)h + \left[g'(f(x_0))r_f(x_0, h) + r_g(f(x_0), k) \frac{k}{h} \right] h,$$

falls $k := f(x_0 + h) - f(x_0)$.

Da mit $h \rightarrow 0$ auch $k \rightarrow 0$ geht, folgt aus der Differenzierbarkeit von g in $f(x_0)$ bzw. f in x_0 und der Definition der Funktionen r_f bzw. r_g , daß

$$\left[g'(f(x_0))r_f(x_0, h) + r_g(f(x_0), k) \frac{k}{h} \right] \longrightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Damit folgt aber auch die Behauptung.

Q.e.d.

Satz 7.4.10 Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$, und sei f in einer Umgebung $U(x_0)$ von x_0 stetig differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung $V(f(x_0))$ von $f(x_0)$, in der die Umkehrabbildung $g := f^{-1} : V(f(x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert und stetig differenzierbar ist. Es gilt dann:

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

Beweis:

Sei o.B.d.A. $f'(x_0) > 0$. Wähle eine Umgebung $U_1(x_0) \subset U(x_0)$ von x_0 und $p > 0$ so, dass gilt: $f'(x) \geq p > 0 \quad \forall x \in U_1(x_0)$. Aus der stetigen Differenzierbarkeit, d.h.:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_0(\varepsilon) > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}, |h| \leq h_0(\varepsilon) : f'(x) - \varepsilon < \frac{f(x_0+h) - f(x)}{h} < f'(x) + \varepsilon$$

folgt somit für $\varepsilon < p$ und beliebiges $x \in U_1(x_0)$ (da $f'(x) \geq p > 0$) :

$$f(x+h) - f(x) < 0 \quad \text{für } h < 0 \quad \text{und} \quad f(x+h) - f(x) > 0 \quad \text{für } h > 0;$$

also ist f streng monoton wachsend in $U_1(x_0)$.

Nach den Sätzen 7.1.1, 7.1.26 und 7.1.27 existiert also $g = f^{-1}$, ist ebenfalls wieder streng monoton und stetig.

Wir beweisen nun noch die Differenzierbarkeit von g und die Darstellung der Ableitung.

Sei $y_0 := f(x_0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{y_0 + h - y_0}{h} = \frac{(f \circ g)(y_0 + h) - (f \circ g)(y_0)}{h} \\ &= \frac{(f \circ g)(y_0 + h) - (f \circ g)(y_0)}{g(y_0 + h) - g(y_0)} \cdot \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h}, \end{aligned}$$

$$\text{also:} \quad \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} = \left(\frac{(f \circ g)(y_0 + h) - (f \circ g)(y_0)}{g(y_0 + h) - g(y_0)} \right)^{-1} \rightarrow \frac{1}{f'(g(y_0))} \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

Aus dieser Darstellung folgt auch sofort die Stetigkeit der Ableitung g' , da f' und g stetig sind.

Q.e.d.

Obiger Satz ermöglicht u.a. die problemlose Differentiation der Arcus-Funktion (in ihrem Existenzbereich):

Beispiel 7.4.11 Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist monoton, stetig und differenzierbar in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Sei $g := \arcsin : (-1, 1) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ihre Umkehrfunktion. Für $x = g(y)$ ist dann:

$$g'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

7.5 Der Mittelwertsatz und Folgerungen

Zu Beginn dieses Abschnitts charakterisieren wir lokale Extrema:

Satz 7.5.1

Es sei $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ in einer Umgebung $U(x_0)$ des Punktes x_0 differenzierbar, und es gelte

$$\exists h_0 > 0 : \forall |h| \leq h_0 : f(x_0 + h) \geq f(x_0).$$

Dann ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis:

$$\text{Wähle } p > 0 \Rightarrow \frac{f(x_0+p)-f(x_0)}{p} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$$

$$\text{bzw. } p < 0 \Rightarrow \frac{f(x_0+p)-f(x_0)}{p} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Q.e.d.

Bemerkung 7.5.2

Der letzte Satz zeigt, dass die Forderung „ $f'(x_0) = 0$ “ notwendig ist für die Existenz eines lokalen Minimums. Analog zeigt man die Notwendigkeit dieser Forderung für die Existenz eines lokalen Maximums. Die Forderung alleine ist jedoch nicht hinreichend, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$ zeigt.

Der folgende Satz stammt von Michel Rolle (21.4.1652 – 8.11.1719):

Satz 7.5.3 (von Rolle)

Es sei $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, differenzierbar in (a, b) , und es gelte $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es eine Zwischenstelle $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$

Beweis:

O.B.d.A. sei $f(a) = f(b) = 0$, (sonst betrachte man $g(x) = f(x) - f(a)$).

Nach Folgerung 7.1.18 existiert $M := \max_{[a,b]} f$, und es ist $M \geq 0$, da $f(a) = 0$.

Fallunterscheidung:

- 1) $M = f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \in (a, b)$ und $f'(x_0) = 0$ nach Satz 7.5.1
- 2) $M = 0$: Betrachte $m = \min_{[a,b]} f = f(x_1) \leq 0$ mit $x_1 \in [a, b]$
 $m < 0 \Rightarrow x_1 \in (a, b)$ mit $f'(x_1) = 0$ (wiederum nach Satz 7.5.1)
 $m = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow f' = 0$

Q.e.d.

Der gerade gezeigte Satz von Rolle ist eine Vorstufe vom

Satz 7.5.4 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Es sei $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ und differenzierbar in (a, b) . Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$, so dass

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0),$$

d.h. es gibt einen Punkt, in dem die Tangente an die Funktion f dieselbe Steigung hat wie die Gerade, die durch die Punkte $f(a)$ und $f(b)$ geht.

Beweis:

Definiere $F(x) := f(x) - f(a) - (x - a) \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$\Rightarrow F(a) = F(b) = 0$ und mit dem Satz von Rolle (7.5.3) folgert man:

$$\exists x_0 \in (a, b) \text{ mit } F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Q.e.d.

In den Anwendungen tritt der Satz auch in den folgenden äquivalenten Formulierungen auf (Voraussetzungen seien wie in Satz 7.5.4):

- 1) $\exists x_0 \in (a, b) : f(b) = f(a) + (b - a)f'(x_0)$
- 2) $\exists \vartheta \in (0, 1) : f(b) = f(a) + (b - a)f'(a + \vartheta(b - a))$
- 3) $\forall x \in [a, b], \forall h, |h| \leq h_0 < \min(|x - a|, |b - x|) \exists \vartheta \in (0, 1) :$
 $f(x + h) = f(x) + hf'(x + \vartheta h).$

Zum Beweis des Mittelwertsatzes musste die Funktion f' nicht stetig sein, doch erfüllt sie die folgende Zwischenwerteigenschaft:

Satz 7.5.5 Sei $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ differenzierbar in $[a, b]$ mit $f'(a) \neq f'(b)$. Dann nimmt f' in (a, b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.

Beweis:

O.B.d.A. sei $f'(a) > z > f'(b)$ und $g(x) := f(x) - zx$.

Zu zeigen ist nun: $\exists x_0 \in (a, b) : g'(x_0) = 0$.

Es ist $g'(a) > 0 > g'(b)$. Da g stetig ist, hat g ein Maximum in einem Punkt $x_0 \in [a, b]$. $x_0 \neq a$, sonst wäre $g(a) \geq g(x)$ für $a \leq x \leq b \Rightarrow g'(a) \leq 0$. Widerspruch zu obigem. $x_0 \neq b$ mit analoger Argumentation. Mit Satz 7.5.1 über lokale Extrema folgt nun:

$$g'(x_0) = 0 \text{ und } x_0 \in (a, b).$$

Q.e.d.

Man beachte, dass auch die stetigen Funktionen nach dem Zwischenwertsatz die Zwischenwerteigenschaft besitzen, dadurch aber wie gesehen nicht charakterisiert werden.

Folgerungen 7.5.6

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall:

1) $f' = 0$ in $I \Leftrightarrow f$ konstant in I .

Beweis:

„ $\Leftarrow$ “ klar

„ $\Rightarrow$ “ $x_1 \neq x_2 \in I$, dann gilt mit dem Mittelwertsatz:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0(x_1, x_2)) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

2) $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ differenzierbar heißt Stammfunktion zu $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) : \Leftrightarrow F' = f$ (vgl. 8. Kapitel).

Sind also F_1 und F_2 Stammfunktionen zu f , so gilt $(F_1 - F_2)' = 0$ und mit 1): $F_1 - F_2 =$ konstant.

3) Ist f differenzierbar, dann gilt:

f monoton wachsend $\Leftrightarrow \forall x \in I : f'(x) \geq 0$.

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “ $h > 0 : \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$

„ $\Leftarrow$ “ $\exists \vartheta \in (0, 1) : f(x+h) - f(x) = hf'(x + \vartheta h) \geq 0$ für $h \geq 0 \Rightarrow f$ monoton wachsend.

4) Die Funktion $f(x) = x^3 - 3x + c$, $c \in \mathbb{R}$ beliebig, hat im Intervall $[0, 1]$ höchstens eine Nullstelle, denn falls: $f(x_1) = f(x_2) = 0$ für $x_1 < x_2$, so gibt es ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit $f'(x_0) = 0$. Es ist $f'(x) = 3x^2 - 3$. Also muss $x_0^2 = 1$ sein, d.h. $x_0 = 1 \notin (x_1, x_2)$, Widerspruch.

5) Lösung einer Differentialgleichung:

Die Gleichung laute $f' = f$ mit $f(0) = c \neq 0$.

Behauptung: $f(x) = ce^x$ ist die einzige Lösung.

Beweis:

$x \mapsto ce^x$ löst das Problem. Sei g eine weitere Lösung, d.h. $g' = g$ und $g(0) = c$. Da f stetig und $f(0) = c$, gilt $f \neq 0$ in $U(0)$. Also gilt in $U(0)$:

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'}{f} - \frac{gf'}{f^2} = \frac{g}{f} - \frac{gf}{f^2} = 0$$

Nach 1) $\exists k \in \mathbb{R} : \frac{g(x)}{f(x)} = k \Leftrightarrow g(x) = kf(x)$. Andererseits ist $g(0) = f(0) = c \neq 0 \Rightarrow k = 1$ und somit $g = f$.

6) Erweiterter Mittelwertsatz:

Es seien $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ differenzierbar in (a, b) und $g(a) \neq g(b)$. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$ mit $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x_0) = f'(x_0)$

Beweis:

Man geht wie beim Beweis des Mittelwertsatzes vor:

$$F(x) := f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

$$\Rightarrow F(a) = F(b) = 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : F'(x_0) = 0.$$

7) Ist die Funktion f mehrfach (hier mindestens zweimal) differenzierbar, so können wir f „entwickeln“ (später bilden wir in dieser Art die „Taylorsche Reihe“).

Sei also $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ und f' differenzierbar in (a, b) .

Definiere
$$F(x) := f(b) - f(x) - (b - x)f'(x) - m \frac{(b-x)^2}{2}$$

mit einem noch zu bestimmenden $m \in \mathbb{R}$. Es ist $F(b) = 0$. Um auch $F(a) = 0$ zu erreichen, muss m wie folgt gewählt werden:

$$m := (f(b) - f(a) - (b - a)f'(a)) \frac{2}{(b-a)^2}$$

Mit dem Mittelwertsatz folgt nun:

$$\begin{aligned} \exists x_0 \in (a, b) : \quad 0 &= F'(x_0) = -f'(x_0) + f'(x_0) - (b - x_0)f''(x_0) + m(b - x_0) \\ &= (b - x_0)(m - f''(x_0)) \\ \Rightarrow m &= f''(x_0) \end{aligned}$$

und wegen $F(a) = 0$ folgt weiter:

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2}f''(x_0)$$

oder allgemein für ein x mit $\vartheta \in (0, 1)$:

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x + \vartheta h).$$

8) Hinreichende Bedingung für (lokale) Extrema:

Es sei $U(x_0)$ eine Umgebung von x_0 , $f \in C^2(U(x_0), \mathbb{R})$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (< 0).

Dann besitzt f in x_0 ein (lokales) Minimum (Maximum).

Beweis:

Mit 7) folgt:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0 + \vartheta h) > f(x_0) (< f(x_0)) \text{ für } h \neq 0,$$

wobei für geeignetes $U(x_0)$ wegen der Stetigkeit von f'' gilt $f''(y) > 0$ (< 0), falls $y \in U(x_0)$.

9) Mit den in 8) gezeigten hinreichenden Bedingungen für Extrema lassen sich sogenannte „Extremwertaufgaben“ lösen wie zum Beispiel:

Unter allen Rechtecken gegebenen Umfangs hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.

Beweis:

Sind a, b die Längen der Seiten, so berechnet sich der Flächeninhalt bzw. der Umfang wie folgt

$$F = a \cdot b \quad \text{bzw.} \quad U = 2(a + b)$$

Aus $b = \frac{U}{2} - a$ ergibt sich:

$$F(a) = a\left(\frac{U}{2} - a\right) = \frac{U}{2}a - a^2$$

und die notwendige Bedingung

$$F'(a) = \frac{U}{2} - 2a = 0$$

für ein Extremum wird durch $a_0 = \frac{U}{4}$ erfüllt, was in der hinreichenden Bedingung

$$F''(a_0) = -2 < 0$$

die Existenz eines Maximums in a_0 beweist. Es folgt weiter: $b_0 = \frac{U}{4} = a_0$, also die Behauptung, denn Maxima am Rande treten nicht auf.

Zur Berechnung von Grenzwerten, sofern sie existieren, behandeln wir zum Schluss dieses Abschnitts die

Regel von de L'Hospital

(benannt nach François Antoine de L'Hospital (?? 1661 – 3.2.1704))

- 1) Seien f, g differenzierbar mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Ziel: Berechne $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, falls der Grenzwert existiert.

O.B.d.A. sei $x > x_0$, dann ist:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

mit $x_0 < t < x$ nach dem erweiterten Mittelwertsatz (7.5.6.6)).

D.h.: Existiert der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f'(t)}{g'(t)}$, so gilt:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Beispiele:

- i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$
ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$

- 2) Grenzwerte im Unendlichen: $x_0 = \infty$ (oder $-\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- 3) Seien nun $f(x_0) = g(x_0) = \infty$ (oder $-\infty$) und $x_1 < x < x_0$, dann gilt wie in 1)

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{mit } x_1 < t < x < x_0$$

und es folgt:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)}{f(x) - f(x_1)} \cdot \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)} \cdot \frac{f'(t)}{g'(t)} \\ &= \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}} \cdot \frac{f'(t)}{g'(t)}.\end{aligned}$$

Es existiere $\gamma := \lim_{t \rightarrow x_0} \frac{f'(t)}{g'(t)}$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $|x_1 - x_0|$ so klein, dass $\left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - \gamma \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Hiermit ist x_1 festgelegt. Weiter ist

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \gamma \right| \leq \left| \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}} - 1 \right| \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} \right| + 1 \cdot \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - \gamma \right| < \varepsilon$$

für $|x - x_0| < \delta(x_1, \varepsilon) = \delta(\varepsilon)$ d.h.: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beispiele:

- i) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$
- ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$
- iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$

wobei man die Ableitung des $\arctan$ entsprechend zu Beispiel 7.4.11 mit Hilfe der Ableitung der Umkehrfunktion (vgl. Satz 7.4.10) berechnet.

- iv) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e$, denn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$.

8 Integration I

Ziel dieses Kapitels soll die elementare Integration sein, die sich als Umkehrung der Differentiation beschreiben lässt.

8.1 Stammfunktionen

Schon in der Folgerung 7.5.6 2) wurde der Begriff der Stammfunktion eingeführt, doch der Vollständigkeit halber hier die folgende

Definition 8.1.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $F \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Dann heißt F Stammfunktion zu $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) : \Leftrightarrow F$ differenzierbar mit $F' = f$.

Aus Folgerungen 7.5.6 2) wissen wir bereits, dass sich Stammfunktionen zu derselben Funktion f höchstens durch eine (additive) Konstante unterscheiden.

Schreibweise: $F =: \int f =: \int f(x)dx$ unbestimmtes Integral von f .

Formal wird also die Differentiation umgekehrt. Da es für das Integrieren kein so einfaches Kalkül wie für das Differenzieren gibt, soll im folgenden etwas geklärt werden, welche Funktionen (-klassen) Stammfunktionen besitzen.

Im allgemeinen sind Stammfunktionen elementarer Funktionen keine elementaren Funktionen mehr.

Beispiele bekannter Stammfunktionen sind:

f	F
1	x
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$,

während es z.B. zu e^{x^2} , $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$ keine elementaren Stammfunktionen gibt.

Aus den Differentiationsregeln lassen sich die folgenden Rechenregeln für das über Stammfunktionen definierte unbestimmte Integral ableiten:

Rechenregeln

- 1) $\int cf = c \int f$ für $c \in \mathbb{R}$, denn $(cF)' = cF'$.
- 2) $\int (f + g) = \int f + \int g$, denn $(F + G)' = F' + G'$.

3) $\int f'g + \int fg' = fg$, denn $(fg)' = f'g + fg'$.

Dies ist die „Regel von der partiellen Integration“.

Beispiele hierzu:

i) $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x$

ii) $\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx$
 $\Rightarrow \int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2}(\cos x \sin x + x)$

iii) $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$

4) $\int ff' = \frac{1}{2}f^2$, denn $(f^2)' = ff'$

5) $\int \frac{f'}{f} = \ln |f|$ für $f \neq 0$, denn $(\ln |f|)' = \frac{f'}{f}$

6) $\int (f \circ g)g' = F \circ g$, denn $(F \circ g)' = (F' \circ g)g' = (f \circ g)g'$

Dies ist die „Substitutionsregel“.

Beispiele hierzu:

i) $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int (x^2)' e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}$

ii) $\int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x (\sin x)' dx = \frac{1}{4} \sin^4 x$

7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$, denn es ist $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$

8) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$, denn es ist $(\ln |ax+b|)' = \frac{a}{ax+b}$

9) Beispiel:

Gesucht: $I := \int \frac{1}{ax^2 + 2bx + c} dx$ für $a \neq 0$.

Es ist $ax^2 + 2bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, mit $x_{1,2} = -\frac{b}{a} \pm \sqrt{b^2 - ac}$.

Wir definieren $w := \sqrt{b^2 - ac}$ und betrachten die Fälle:

a) $w=0$: $\Rightarrow I = \frac{1}{a} \int \frac{1}{(x - \frac{b}{a})^2} dx = -\frac{1}{a} \frac{1}{(x - \frac{b}{a})} = \frac{-1}{ax - b} \quad (x \neq \frac{b}{a})$

b) $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, d.h. $b^2 > ac \Rightarrow x_1 \neq x_2$ reell, und es ist:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} &= \frac{1}{x_1-x_2} \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} \right) = \frac{a}{2w} \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} \right) \\ \Rightarrow I &= \frac{1}{2w} (\ln |x - x_1| - \ln |x - x_2|) = \frac{1}{2w} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{b^2 - ac}} \ln \left| \frac{ax + b - \sqrt{b^2 - ac}}{ax + b + \sqrt{b^2 - ac}} \right|, \quad (x \neq x_1, x \neq x_2) \end{aligned}$$

c) $w \in i\mathbb{R}$, d.h. $b^2 < ac$ und w rein imaginär. Das Resultat aus b) lässt sich verwenden, wenn man ins Reelle zurückrechnet:

$w = ip$ mit $p = \sqrt{ac - b^2} > 0$. Interpretieren wir den Logarithmus von komplexen

Zahlen formal als Umkehrfunktion der komplexen Exponentialfunktion, so berechnen wir mit $\alpha := \frac{ax+b}{p}$

$$I = \frac{1}{2ip} \ln \left(\frac{ax+b-w}{ax+b+w} \right) = \frac{1}{2ip} \ln \left(-\frac{1+i\alpha}{1-i\alpha} \right) = \frac{1}{2ip} \ln \left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha i - 1}{\alpha^2 + 1} \right)$$

Weiter folgt mit $z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} e^{i \arctan \frac{y}{x}}$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2ip} \ln \left(\frac{\sqrt{(\alpha^2 - 1)^2 + 4\alpha^2}}{1 + \alpha^2} e^{i \arctan \frac{-2\alpha}{\alpha^2 - 1}} \right) \\ &= \frac{1}{2ip} i \arctan \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1}; \quad \text{weil } \frac{\sqrt{(\alpha^2 - 1)^2 + 4\alpha^2}}{1 + \alpha^2} = 1 \\ &= \frac{1}{p} \arctan \alpha, \end{aligned}$$

da für $z = \arctan \alpha$ gilt: $\tan 2z = \frac{\sin 2z}{\cos 2z} = \frac{2 \sin z \cos z}{\cos^2 z - \sin^2 z} = 2 \frac{\tan z}{1 - \tan^2 z} \Rightarrow 2z = \arctan \frac{2 \tan z}{1 - \tan^2 z}$.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{ac - b^2}} \arctan \left(\frac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}} \right),$$

was sich durch Differenzieren sofort nachprüfen lässt.

10) Das Beispiel 9) führt uns zu der allgemeinen Methode der „Partialbruchzerlegung“:

Es sei P_i : Polynom vom Grad $i \in \mathbb{N}_0$.

Gesucht ist:

$$I := \int \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx.$$

Falls $m < n$, so teilt man mit Hilfe der Partialbruchzerlegung (Umkehrung der Addition von Brüchen) den Integranden in Summanden auf, die im Nenner Polynome niedrigeren Grades ($< n$) haben und sich dann einzeln integrieren lassen. Gilt $m \geq n$, so dividiert man erst durch das Polynom im Nenner und behandelt auftretende Summanden der obigen Form wiederum mit Hilfe der Partialbruchzerlegung.

Beispiele:

$$\text{i)} \quad \frac{x+1}{(x+3)(x+2)} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+2} \quad \Rightarrow \quad ax + 2a + bx + 3b \stackrel{!}{=} x + 1$$

Aus Koeffizientenvergleich für Potenzen von x erhält man die Gleichungen:

$$a + b = 1 \quad \text{und} \quad 2a + 3b = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2, \quad b = -1.$$

(Die Berechnung $a = L.S. \cdot (x+3)|_{x=-3}$, $b = L.S. \cdot (x+2)|_{x=-2}$, wobei L.S. für die linke Seite der Gleichung steht, führt zum selben Ergebnis.)

$$\text{ii)} \quad \frac{x^3 - 2}{x(x-1)^2} = 1 + \frac{2x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 + x} = 1 + \frac{2x^2 - x - 2}{x(x-1)^2} \stackrel{!}{=} 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$A = L.S. \cdot x|_{x=0} = -2$, $C = L.S. \cdot (x-1)^2|_{x=1} = -1$ und es muss dann notwendigerweise $B = 4$ gelten. (Koeffizientenvergleich führt hier zu den Gleichungen $A + B =$

2, $-2A - B + C = -1$ und $A = -2$ und somit zu den selben Ergebnissen.)

Bei diesem Beispiel bietet sich auch eine direkte Berechnung durch die aus 7.5.6 7) bekannte Reihenentwicklung: $f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(1 + \delta(x-1))$ an. Hierbei sei also $f(x) := \frac{2x^2-x-2}{x} \stackrel{!}{=} A(x-1)^2 + B(x-1) + C$,

dann ist $C = f(1) = -1$, $B = f'(1) = \left(\frac{4x-1}{x} - \frac{2x^2-x-2}{x^2}\right)|_{x=1} = 3 - (-1) = 4$.

Die Berechnungen führen nun zu:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-2}{x(x-1)^2} dx &= \int \left(1 + \frac{-2}{x} + \frac{4}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2}\right) dx \\ &= x - 2 \ln|x| + 4 \ln|x-1| + \frac{1}{x-1}\end{aligned}$$

Zusammenfassung

integrierbarer Funktionen, d.h. Funktionen, für die wir (bis jetzt) Stammfunktionen berechnen können:

Sei $R = \frac{P_m}{P_n}$ eine rationale Funktion, $\exp : x \rightarrow e^x$, und $id : x \rightarrow x$. Dann ist bekannt:

- 1) $\int R$
- 2) $\int R \circ \exp = \int R(e^x)dx = \int \frac{R(e^x)}{e^x} e^x dx = \int \frac{R(t)}{t} dt \circ \exp$ mit Substitution und $\left(\int \frac{R}{id}\right)$ wird mit 1) gelöst.
- 3) $\int R(\sinh, \cosh) : \text{geht analog zu 2)}$
- 4) $\int R(\sin, \cos) : \text{geht analog zu 2) über } e^{ix}, \text{ oder Substitution mit } t = g(x) = \tan \frac{x}{2},$
 $x = 2 \arctan t$, dann ist $\sin x = \frac{2g}{1+g^2}$, $\cos x = \frac{1-g^2}{1+g^2}$ und $g' = \frac{1}{2}(1+g^2)$
 $\Rightarrow \int R(\sin x, \cos x)(x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \circ g$, was sich wiederum mit 1) weiter ausrechnen lässt.
 Beispiel: $\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \circ g = \ln|t| \circ g = \ln|\tan \frac{x}{2}|$
- 5) $\int R(id, \sqrt{1-id^2})(x)dx = \int R(\sin, \cos) \cos \varphi d\varphi$ mit der Substitution $x = \sin \varphi$, dann weiter mit 4).
- 6) $\int R(id, \sqrt{1+id^2})(x)dx = \int R(\sinh, \cosh) \cosh \varphi d\varphi$ mit der Substitution $x = \sinh \varphi$, dann weiter mit 3).
- 7) $\int R(id, f)$ mit $f = \sqrt{ax^2+2bx+c}$ wird durch $ax^2+2bx+c = a(x+\frac{b}{a})^2 + \frac{ac-b^2}{a}$ auf 5) bzw. 6) zurückgeführt.

8.2 Treppenfunktionen und ihre Integrale

Im letzten Abschnitt wurde die Integration als Umkehroperation der Differentiation eingeführt. Unklar ist aber noch, bis auf die behandelten Beispiele, für welche Funktionenklassen Stammfunktionen existieren. Wir wollen nun die Integration von einer anderen Seite her angehen,

nämlich über den Zusammenhang mit der Berechnung von Flächeninhalten unterhalb einer Kurve. Ziel ist der folgende Sachverhalt:

Für $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f > 0$, $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, 0 < y < f(x)\}$ und F Stammfunktion zu f sei $|G| := F(b) - F(a) =: \int_{(a,b)} f =: \int_a^b f(x)dx$, wobei $|G|$ der „Flächeninhalt“ oder das „Maß“ von G ist.

Diese Definition ist unabhängig von der speziellen Stammfunktion, da die mögliche additive Konstante wegen der Differenz wegfällt.

Um das Ziel zu erreichen, beginnen wir mit möglichst einfachen Funktionen. Da sich der Flächeninhalt eines Rechtecks aus dem Produkt der Seitenlängen berechnet, erhalten wir für die konstante Funktion $f : x \rightarrow c \in \mathbb{R}^+$, daß für den Flächeninhalt gelten soll: $|G| \stackrel{!}{=} c(b-a)$. Tatsächlich ist die Stammfunktion zu f gerade

$$F(x) = cx + \text{const} \quad \Rightarrow \quad |G| = \int_{(a,b)} f = F(b) - F(a) = cb - ca = c(b-a).$$

D.h. In diesem Falle, also für konstante Funktionen f , stimmen der elementargeometrische Flächeninhalt mit dem gerade definierten überein. Die nächst einfachen Funktionen nach den konstanten Funktionen sind die sogenannten Treppenfunktionen:

Definition 8.2.1

i) $Z_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ heißt *Partition des Intervalls* $I := (a, b) : \Leftrightarrow$

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

ii) Ist $Z_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine *Partition des Intervalls* I , so heißt $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *Treppenfunktion*, falls f konstant auf den Intervallen (x_{i-1}, x_i) , d.h.:

$$f|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i \in \mathbb{R},$$

Bemerkung 8.2.2

i) Über die Werte $f(x_i)$ wird keine Aussage gemacht. Man könnte z.B. von rechts stetig auf x_i fortsetzen, doch ist dies für das Folgende ohne Belang.

ii) Verschiedene Partitionen können dieselbe Funktion f liefern. (Bilde z.B. neue Partition durch Hinzunahme von zusätzlichen Punkten x_j).

iii) Mit f und g sind auch $f + g$ und $f \cdot g$ Treppenfunktion. Man wähle hierfür eine Partition, die alle Punkte der Partitionen von f und von g enthält.

Durch die letzte Bemerkung kommt man auf die folgende

Definition 8.2.3

Es bezeichne $\mathcal{T}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ den Vektorraum der Treppenfunktionen von I , der mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$ zum normierten Vektorraum wird. Mit $\tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$ bezeichnen wir die Vervollständigung von $\mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ bezüglich dieser Norm.

Bemerkung 8.2.4

Aus Abschnitt 7.2 wissen wir, dass die Vektorräume $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{BC}(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ und $\mathcal{C}^*(I, \mathbb{R}) :=$ Menge der gleichmäßig stetigen Funktionen aus $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ vollständig bezüglich der Supremumsnorm sind, doch $\mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ ist es nicht, deswegen die Vervollständigung (vgl. Satz 5.2.9).

Nach der abstrakten Vervollständigung des Vektorraums $\mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ gilt es nun, die Elemente des Banachraums $\tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$ genauer zu charakterisieren. Zunächst wollen wir aber die Integration für Treppenfunktionen definieren:

Definition 8.2.5

Sei $P := Z_n = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Partition von $I := (a, b)$ und $f \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ mit $f|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i \in \mathbb{R}$, dann bezeichnet

$$\mathbb{I}(f) := \int_{(a,b)} f := \int_a^b f(x) dx := \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$$

das (bestimmte) Integral von f über I .

Bemerkung 8.2.6

i) Das eben definierte Integral hängt nicht von der speziellen Partition P ab:

sind P_1 und P_2 Partitionen von I und P_3 , deren Vereinigung (d.h. P_3 enthält alle Punkte aus P_1 und P_2), dann gilt, falls $\mathbb{I}_j(f)$ das zu P_j ($j = 1, 2, 3$) gehörige Integral bezeichne, und da das Hinzufügen von Punkten die Summe $\mathbb{I}_j(f)$ ($j = 1, 2$) nicht ändert:

$$\mathbb{I}_1(f) = \mathbb{I}_2(f) = \mathbb{I}_3(f).$$

ii) Für alle $a < c < b$ gilt: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Betrachten wir die Integration als eine Abbildung zwischen Vektorräumen, so lässt sich die folgende Aussage beweisen:

Hilfssatz 8.2.7

Das Integral $\mathbb{I} : \mathcal{T}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine stetige lineare Abbildung in normierten Räumen.

Beweis:

Die Linearität $\mathbb{I}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathbb{I}(f) + \beta \mathbb{I}(g)$ folgt sofort aus der Definition.

Zur Stetigkeit:

$$\begin{aligned} |\mathbb{I}(f)| &= \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |c_i| (x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b |f(x)| dx \leq \|f\|_{\infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \|f\|_{\infty} (b - a) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{I} \in \mathcal{L}_b(\mathcal{T}(I, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \Rightarrow \mathbb{I} \in \mathcal{C}(\mathcal{T}(I, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ nach der 4. Aufgabe des 11. Übungsblatts.

Q.e.d.

Bemerkung 8.2.8

Der Raum $\mathcal{L}_b(\mathcal{T}(I, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ der stetigen, linearen Abbildung wird mit der Norm

$\|A\|_{\mathcal{L}_b} := \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |A(f)|$ für $A \in \mathcal{L}_b(\mathcal{T}(I, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ selbst wieder zu einem normierten Raum. Dies gilt auch allgemein für den Raum der stetigen linearen Abbildungen $\mathcal{L}_b(X, \mathbb{R})$ auf einem beliebigen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$

Im folgenden Satz beweisen wir eine allgemeine Aussage über die eindeutige Fortsetzbarkeit stetiger linearer Abbildungen auf die Vervollständigung des zugrundeliegenden normierten Raumes.

Satz 8.2.9

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $A \in \mathcal{L}_b(X, \mathbb{R})$ eine stetige, lineare Abbildung. Ist dann $\tilde{X}$ die Vervollständigung von X , so gibt es genau eine Abbildung $\tilde{A} \in \mathcal{L}_b(\tilde{X}, \mathbb{R})$ mit:

$$\tilde{A}|_X = A \quad (\text{Identifizierung von } x \text{ über isometrische Einbettung})$$

$$\text{und} \quad \|\tilde{A}\|_{\mathcal{L}_b(\tilde{X}, \mathbb{R})} = \|A\|_{\mathcal{L}_b(X, \mathbb{R})}$$

Beweis:

Sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und $(x_n)_n$ eine Folge mit $x_n \in X$ und $x_n \rightarrow \tilde{x}$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von A und der Konvergenz der x_n :

$$|Ax_n - Ax_m| \leq \|A\|_{\mathcal{L}_b} \|x_n - x_m\| \rightarrow 0 \quad \text{für } m, n \rightarrow \infty.$$

Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert ein $r \in \mathbb{R}$ mit $Ax_n \rightarrow r$ unabhängig von der speziellen Folge $(x_n)_n$, die gegen $\tilde{x}$ konvergiert, denn für $y_n \rightarrow \tilde{x}$ gilt, falls $Ay_n \rightarrow s$

$$\begin{aligned} |s - r| &\leq |s - Ay_n| + |Ay_n - Ax_n| + |Ax_n - r| \\ &\leq |s - Ay_n| + \|A\|_{\mathcal{L}_b} \|y_n - x_n\| + |Ax_n - r| \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s = r$$

Setze also $\tilde{A}\tilde{x} := r \Rightarrow \tilde{A} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ linear, stetig und $\tilde{A}|_X = A$.

Aus $|Ax_n| \leq \|A\|_{\mathcal{L}_b} \|x_n\|$ folgt: $\|\tilde{A}\|_{\mathcal{L}_b} \leq \|A\|_{\mathcal{L}_b}$, und da $\tilde{A}|_X = A$ gilt $\|\tilde{A}\|_{\mathcal{L}_b} \geq \|A\|_{\mathcal{L}_b}$, also folgt insgesamt $\|\tilde{A}\|_{\mathcal{L}_b} = \|A\|_{\mathcal{L}_b}$.

Zur Eindeutigkeit:

Sei $\tilde{A}_1$ eine weitere Fortsetzung von A auf $\tilde{X}$ mit den geforderten Eigenschaften, $x \in \tilde{X}, x_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt wegen der Stetigkeit von $\tilde{A}$ bzw. $\tilde{A}_1$:

$$\tilde{A}x = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_1x_n = \tilde{A}_1x.$$

Q.e.d.

Durch die Anwendung dieses allgemeinen Satzes auf unsere spezielle Abbildung der Integration können wir den Begriff des Integrals für Treppenfunktionen auf Elemente aus $\tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$ erweitern:

Anwendung:

Es sei $f \in \tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$, dann können wir das Integral $\tilde{\mathbb{I}}(f)$ mit Hilfe von Satz 8.2.9 in folgender Weise eindeutig erklären:

$$\tilde{\mathbb{I}}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{I}(f_n) \quad \text{falls } f_n \rightarrow f \text{ in der Supremumsnorm } \|\cdot\|_\infty.$$

Wir schreiben dann wieder: $\mathbb{I}(f) =: \int_I f =: \int_a^b f(x) dx$.

Außerdem gilt weiterhin: $|\mathbb{I}(f)| \leq (b-a)\|f\|_\infty$

Bemerkung 8.2.10

Die zunächst abstrakten Elemente von $\tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$ lassen sich mit Funktionen aus $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ identifizieren, da für eine Cauchyfolge $(f_n)_n$ aus $\tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$ punktweise Konvergenz folgt. Andererseits ist $\mathcal{T}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ und da $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ bzgl. der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ vollständig ist, gilt: $\tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ (wieder über die übliche Identifizierung).

Nachdem wir die Integration für Elemente aus $\tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$ erklärt haben, wollen wir diesen Raum nun genauer charakterisieren:

Satz 8.2.11

Es gilt $\mathcal{C}^*(I, \mathbb{R}) \subset \tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$, wobei $\mathcal{C}^*(I, \mathbb{R})$ die Menge der gleichmäßig stetigen Funktionen aus $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ bezeichne. D.h. dass sich gleichmäßig stetige Funktionen gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren lassen.

Beweis:

Sei $f \in \mathcal{C}^*(I, \mathbb{R})$, dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x, y, |x - y| < \delta : \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Zu $\varepsilon > 0$ und $\delta = \delta(\varepsilon)$ wähle Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ mit $\max_{i=1, \dots, n} |x_i - x_{i-1}| < \delta$ und definiere

$$g(x) := f(x_i) \text{ für } x \in [x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann ist $g \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ und

$$\|g - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |g(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Q.e.d.

Aus dem letzten Satz folgt also, dass wir über die Definition des Integrals für Treppenfunktionen und die Vervollständigung nun auch das Integral für gleichmäßig stetige Funktionen kennen.

Beispiel 8.2.12

Es sei $I := (0, a)$ und $f_n \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ mit $f_n(x) := \frac{[nx]}{n}$ für $x \in I$ (Gaußklammer). Aus der

graphischen Darstellung der Funktionen f_n vermuten wir die Konvergenz gegen $f(x) = x$:

$$0 \leq x - f_n(x) = x - \frac{[nx]}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow f_n \rightarrow f$ gleichmäßig mit $f(x) := x$. Somit ist f integrierbar, und der Wert von $\mathbb{I}(f)$ berechnet sich wie folgt:

Wähle Partition: $0 = x_0 < x_1 \dots < x_k \leq x_{k+1} \leq a$
ggf.

mit $x_j := \frac{j}{n}$, $0 < j \leq k = [n \cdot a]$, dann ist: $x_j - x_{j-1} = \frac{1}{n}$ und $f_n|_{(x_{j-1}, x_j)} = \frac{j-1}{n}$, $0 < j \leq k$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathbb{I}(f_n) &= \sum_{j=1}^k \frac{j-1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{k}{n} \left(a - \frac{[na]}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{k(k-1)}{2} + \frac{k}{n^2} q_n, \quad \text{mit } q_n := na - [na] \quad 0 \leq q_n < 1 \\ &= \frac{1}{2n^2} (na - q_n)(na - q_n - 1 + 2q_n) \\ &= \frac{a^2}{2} + b_n, \end{aligned}$$

mit $b_n := -\frac{a}{2n} + \frac{q_n - q_n^2}{2n^2} \Rightarrow |b_n| \leq \frac{a+2}{2n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{I}(f) = \lim_n \mathbb{I}(f_n) = \frac{a^2}{2}, \quad \text{d.h.} \quad \int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}.$$

8.3 Regelfunktionen

Da auf einem abgeschlossenen Intervall $\bar{I} = [a, b]$ definierte stetige Funktionen nach Satz 7.1.25 gleichmäßig stetig sind, können wir sie mit dem Ergebnis aus Abschnitt 8.2 integrieren:

$$f \in \mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R}) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^*(I, \mathbb{R}) \subset \tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R}),$$

wie wir es in Beispiel 8.2.12 explizit für die Funktion $f(x) = x$ durch Approximation getan haben.

Definition 8.3.1

Es sei

$$\mathcal{R}(I, \mathbb{R}) := \tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$$

und $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm. Dann nennen wir $(\mathcal{R}(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ den normierten Raum der Regelfunktionen.

Es gelten die Inklusionen:

$$\mathcal{C}^*(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{R}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$$

und für $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ ist das Integral $\int_I f = \int_a^b f(x) dx$ definiert.

Wir wollen nun unser Ziel aus Abschnitt 8.2 weiterverfolgen und die Elemente aus $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ genauer charakterisieren.

Satz 8.3.2

$f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ monoton $\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$.

Beweis:

O.B.d.A. sei f monoton wachsend und $f(a) < f(b)$.

Wir zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \exists g \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R}) : \|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben und dazu $P = \{y_0, \dots, y_n\}$ mit $f(a) = y_0 < y_1 < \dots < y_n = f(b)$ eine Partition von $[f(a), f(b)]$ mit $|y_i - y_{i-1}| < \varepsilon$. Definiere $Y_n := [y_{n-1}, y_n]$, $Y_i := [y_{i-1}, y_i]$, $1 \leq i \leq n-1$ und $X_i := f^{-1}(Y_i)$, $1 \leq i \leq n$. Dabei können auch Mengen X_j auftreten, die nur einen Punkt enthalten (f konstant) oder sogar leer sind (f hat Sprung über das Intervall Y_j). Die Randpunkte der nichtleeren $X_i (= [\alpha_i, \beta_i]$ mit $\alpha_i \leq \beta_i$ oder $x_i = \beta_i$) bilden eine Partition von $[a, b]$:

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^n \overline{X_i}$$

und jedes $x \in [a, b]$ liegt in genau einem der X_i .

Definiere $g(x) := y_{i-1} \quad x \in X_i$,
 $\Rightarrow g \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \|g - f\|_\infty < \varepsilon$.

Q.e.d.

Satz 8.3.3 (Charakterisierung von $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$)

$f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R}) \Leftrightarrow f$ besitzt überall einen rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert, d.h.:

$\exists \lim_{x \searrow x_0} f(x)$ bzw. $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ für $x_0 \in \overline{I} = [a, b]$.

(Ist $x_0 \in \{a, b\}$ jeweils nur einer der beiden Grenzwerte.)

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “

Sei $x_0 \in [a, b]$. Wir zeigen die Existenz des rechtsseitigen Grenzwertes:

Seien $x, y > x_0$ und $f_n \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ mit $f_n \rightarrow f$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Dann gilt mit der Dreiecksungleichung:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

Wegen der Konvergenz von f_n gegen f findet man zu gegebenen $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$, so dass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ der erste und der dritte Term auf der rechten Seite kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ sind. Bei festem $n = n_0(\varepsilon)$ gilt für den mittleren Term

$$|f_n(y) - f_n(x)| = 0$$

für $|x - x_0|, |y - x_0| < \delta(n, x_0) = \delta(\varepsilon, x_0)$, egal ob x_0 Sprungstelle der Treppenfunktion f_n ist oder nicht, da nach Voraussetzung $x, y > x_0$.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in (x_0, x_0 + \delta) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

d.h. $(f(x))$ ist bzgl. $x \searrow x_0$ eine Cauchyfolge, die wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gegen einen Grenzwert konvergiert, was zu zeigen war.

In analoger Weise zeigt man die Existenz des linksseitigen Grenzwertes für $x_0 \in (a, b]$.

„ $\Leftarrow$ “:

Sei $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ und besitze überall, auch für die Randpunkte von I , einen rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert. Dann gilt: $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall z_0 \in \bar{I} \quad \exists \delta > 0 :$

$$(x, y \in B(z_0, \delta) \wedge (x, y > z_0 \vee x, y < z_0)) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Da $\bar{I} = [a, b]$ kompakt ist (Hilfssatz 5.4.8), gibt es eine endliche Teilüberdeckung der Art:

$$[a, b] \subset \bigcup_{j=1}^k \mathcal{B}(z_0^j, \delta_j) \quad , z_0^j \in \bar{I}, \delta_j \text{ das zu } z_0 = z_0^j \text{ gehörige } \delta \text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

Wir ordnen nun die z_0^j und die Endpunkte der Intervalle $\mathcal{B}(z_0^j, \delta_j)$ der Größe nach und erhalten so eine Partition $a = x_0 < \dots < x_n = b$ von $[a, b]$. Wir definieren nun $g \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ durch:

$$g(x) := \begin{cases} f(x_j), & x = x_j, \quad j = 0, \dots, n \\ f(w_j), & x_j < x < x_{j+1}, \quad j = 0, \dots, n-1, \end{cases}$$

wobei $w_j \in (x_j, x_{j+1})$ beliebig gewählt wird.

Es gilt dann für $x = x_j : g(x) - f(x) = 0$ und für $x \neq x_j$, also etwa $x \in (x_j, x_{j+1})$, liegen w_j und x entweder rechts oder links von einem z_0^l in $\mathcal{B}(z_0^l, \delta_l)$, und es gilt in jedem Fall:

$$|g(x) - f(x)| = |f(w_j) - f(x)| < \varepsilon,$$

nach der Definition der z_0^j bzw. δ_j .

$$\Rightarrow \|g - f\|_\infty < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R}).$$

Q.e.d.

Folgerung 8.3.4

Sei $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$, dann hat f höchstens abzählbar viele Sprungstellen.

Beweis:

Sei A_n die Anzahl der Sprungstellen, in denen f um mehr als $\frac{1}{n}$ springt. Dann ist $A_n < \infty$, denn sonst gäbe es eine monotone Folge $(x_j)_j$ solcher Sprungstellen und benachbarter Punkte mit $|f(x_j) - f(x_{j-1})| > \frac{1}{n}$. $(x_j)_j$ konvergiert gegen ein $x_0 \in [a, b]$, aber $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ oder $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ existiert nicht, also Widerspruch zu Satz 8.3.3, woraus die Endlichkeit von A_n folgt.

Hieraus folgt nun, da die abzählbare Vereinigung endlicher Mengen wieder abzählbar ist (vgl. Satz 5.1.5), die Menge der Sprungstellen $= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \text{Sprungstelle mit Sprung} > \frac{1}{n} \}$ ist abzählbar.

Q.e.d.

Folgerung 8.3.5

$$\mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R}) \mid \forall x_0 \in \bar{I} : \lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) \}$$

Das folgende Beispiel einer Funktion mit abzählbar vielen Sprüngen soll zeigen, dass es Regelfunktionen gibt, die weder stetig noch stückweise stetig, d.h. stetig mit Ausnahme endlich vieler Sprünge, sind.

Beispiel 8.3.6

Sei $I = [0, 1]$ und

$$f(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x = 1 \\ (\frac{1}{2})^k, & (\frac{1}{2})^k \leq x < (\frac{1}{2})^{k-1} \quad , \quad k = 1, 2, \dots \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases}$$

$f \in B(\mathcal{T}, \mathbb{R})$ monoton $\Rightarrow f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$, aber f hat unendlich viele Sprungstellen ($x = (\frac{1}{2})^k, k = 1, 2, \dots$) und ist deswegen nicht (stückweise) stetig.

Bemerkung 8.3.7

Für die Integrale von Regelfunktionen gelten die gleichen Rechenregeln wie für Treppenfunktionen, was sich im Einzelfall mit Approximationen überprüfen lässt. (Die Tilde für die fortgesetzte Abbildung wird jetzt weggelassen):

$$\mathbb{I}(f + g) = \mathbb{I}(f) + \mathbb{I}(g)$$

$$\mathbb{I}(cf) = c\mathbb{I}(f)$$

$$f \geq 0 \Rightarrow \mathbb{I}(f) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx \quad a < c < b \\ (b-a) \inf_I f &\leq \mathbb{I}(f) \leq (b-a) \sup_I f \end{aligned}$$

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir noch den folgenden Satz beweisen, der in geeigneter Weise dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (vgl. Satz 7.5.4) entspricht.

Satz 8.3.8 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$, so daß gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a),$$

d.h. man findet einen Punkt x_0 in dem Intervall $[a, b]$, so dass der Flächeninhalt des Rechtecks, gebildet aus der x -Achse, der Parallelen zur x -Achse durch den Punkt $f(x_0)$ und den Parallelen zur y -Achse durch die Punkte a und b dem Flächeninhalt unter der Funktion f über dem Intervall $[a, b]$ entspricht.

Beweis:

Definiere $m := \min_{[a,b]} f$ und $M := \max_{[a,b]} f$, was wegen der Stetigkeit von f wohldefiniert ist.

$$\Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

nach den Rechenregeln für die Integrale von Regelfunktionen.

$$\Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 7.1.19) gilt nun wegen der Definition von m und M :

$$\exists x_0 \in (a, b) \quad : \quad f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Q.e.d.

8.4 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Abschnitt wollen wir den Zusammenhang zwischen dem Integral über Regelfunktionen aus Abschnitt 8.3 und den Stammfunktionen aus Abschnitt 8.1, also eine Verknüpfung der Differentiation und der Integration herstellen. Für Treppenfunktionen hatten wir die Beziehung $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ für $f \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ und F Stammfunktion zu f bereits in Abschnitt 8.1 eingesehen.

Hilfssatz 8.4.1

Sei $I := (a, b)$, $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ und $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ für $x \in [a, b]$. Dann ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert und Lipschitz-stetig, und es gilt $F(a) = 0$.

Beweis:

Mit den Eigenschaften des Integrals für Regelfunktionen (vergleiche Ende Abschnitt 8.3) folgern wir:

$$\begin{aligned} |F(x_1) - F(x_2)| &= \left| \int_a^{x_1} f(t) dt - \int_a^{x_2} f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \quad (\text{O.B.d.A. } x_1 < x_2) \\ &\leq |x_1 - x_2| \sup_{x \in [x_1, x_2]} |f(x)| \\ &\leq |x_1 - x_2| \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

also ist F Lipschitz-stetig. Die restlichen Behauptungen des Hilfssatzes sind klar.

Q.e.d.

Im allgemeinen ist die Funktion F nicht differenzierbar, doch es existieren die rechts- bzw. linksseitigen Grenzwerte des Differentenquotienten, wie wir im folgenden Satz beweisen wollen.

Satz 8.4.2

Seien $I = [a, b]$, $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ und $F(x) := \int_a^x f(t) dt$.

Dann gilt für $x \in I$:

$$\exists \lim_{h \searrow 0} \frac{\pm F(x \pm h) \mp F(x)}{h} = f(x \pm 0) =: F'_\pm(x),$$

wobei $f(x \pm 0) := \lim_{h \searrow 0} f(x \pm h)$.

Beweis:

O.B.d.A. zeigen wir die Behauptung für die rechtsseitige Ableitung:

$$\begin{aligned} \text{Es ist } F(x+h) - F(x) &= \int_x^{x+h} f(t) dt \text{ und } f(x+0)h = f(x+0) \int_x^{x+h} 1 dt \\ \Rightarrow \left| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x+0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x+0)) dt \right|. \end{aligned}$$

Da f nach Voraussetzung eine Regelfunktion ist, gilt nach Satz 8.3.3:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t > x, \quad |t - x| < \delta : \quad |f(t) - f(x+0)| < \varepsilon,$$

d.h. für $0 < h < \delta = \delta(\varepsilon)$ folgt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x+0) \right| &\leq \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \int_x^{x+h} dt = \varepsilon \\ \Rightarrow \quad \exists F'_+(x) &= f(x+0). \end{aligned}$$

Q.e.d.

Hieraus folgt nun sofort der

Satz 8.4.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Es seien $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $x \in [a, b]$ und

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt.$$

Dann ist $F \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ und $F' = f$.

Dieser Satz besagt also, dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion F besitzt, welche durch $F(a)$ (Vorgabe hier: $F(a) = 0$) eindeutig bestimmt ist:

Folgerung 8.4.4

Sei $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ und F eine Stammfunktion zu f . Dann ist

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) =: F \Big|_a^b$$

Beweis:

Die Stammfunktionen unterscheiden sich höchstens um eine Konstante, also gilt:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + c$$

Für $x = a$ folgt hieraus $0 = F(a) + c \Rightarrow c = -F(a)$, und somit $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t) dt$. Setze nun $x = b$, so folgt die Behauptung

Q.e.d.

Bemerkung 8.4.5

Da wir nun nach Folgerung 8.4.4 das bestimmte Integral durch die Stammfunktion in der angegebenen Weise beschreiben können, sind nun die Regeln der partiellen Integration bzw. der Substitution aus Abschnitt 8.1 somit auch auf bestimmte Integrale anwendbar:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)dx &= fg\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \\ \text{bzw. } \int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.\end{aligned}$$

Zur letzten Bemerkung rechnen wir am Ende dieses Abschnitts noch ein

Beispiel 8.4.6

Es soll die Fläche des halben Einheitskreises, beschrieben als Bogen über der t -Achse

($f(t) = \sqrt{1-t^2}$ für $t \in [-1, 1]$) berechnet werden:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt &= \int_{-\pi}^0 \sqrt{\sin^2 x}(-\sin x)dx = \int_{-\pi}^0 \sin^2 x dx \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{-\pi}^0 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Dabei benutzen wir im ersten Schritt die Substitution $g(x) = \cos x$ in $[-\pi, 0]$ und rein formal: $t = g(x) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = g'(x) \Rightarrow dt = g'(x)dx$. Im zweiten Schritt beachte man, dass $\sin$ auf $[-\pi, 0]$ negativ ist, und im dritten benutzt man die Ergebnisse aus dem Beispiel unter 3) des Hilfssatzes 8.1.2.

8.5 Vertauschung von Grenzprozessen

In vielen Anwendungen tritt das Problem auf, dass Grenzprozesse vertauscht werden sollen, wie zum Beispiel die Konvergenz von Funktionenfolgen oder Differentiation mit der Integration. Eine zufriedenstellende Antwort, wann dies möglich ist, wird später (Lebesguesche Integration) gegeben, doch wollen wir in diesem Abschnitt einige hinreichende Bedingungen für die Vertauschbarkeit von Grenzprozessen bei Regelfunktionen beweisen.

Vertauschung von Integration und „ $n \rightarrow \infty$ “:

Seien f_n und f aus $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ oder $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ mit $I = [a, b]$ und es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, dh. die Funktionenfolge f_n konvergiert punktweise gegen die Funktion f .

Die Frage ist nun, ob die folgende Beziehung gültig ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Die Antwort ist im allgemeinen nein, denn es gilt:

Beispiel 8.5.1

Es sei $I = [0, 1]$;

$$f_n(x) := n^2 x e^{-nx} \quad \text{und} \quad f(x) := 0.$$

Dann gilt für $x \neq 0$:

$$f_n(x) = \frac{(nx)^2 e^{-nx}}{x} = \frac{(nx)^2}{x e^{nx}} \leq \frac{6}{(nx)^3} \frac{(nx)^2}{x} = \frac{6}{nx^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = f(x),$$

denn $e^z \geq \frac{z^3}{3!}$ für $z \geq 0$, aber:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = -n x e^{-nx} \Big|_0^1 + n \int_0^1 e^{-nx} dx = -n e^{-n} - e^{-n} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x) dx.$$

Ein hinreichendes Kriterium für die Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung bei Funktionenfolgen und Integration, wie im Beispiel beschrieben, ist die gleichmäßige Konvergenz.

Satz 8.5.2

Seien $f_n, f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ und $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ (gleichmäßige Konvergenz). Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Beweis:

Einerseits klar aus der Definition von $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ als Abschluss der Treppenfunktion $\mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ bezüglich der Supremumsnorm und des Integrals. Andererseits kann man folgendes betrachten:

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Q.e.d.

Die gleichmäßige Konvergenz ist zwar eine hinreichende Bedingung für die Vertauschbarkeit in diesem Falle, jedoch keineswegs notwendig, wie das nächste Beispiel zeigt:

Beispiel 8.5.3

Es sei $I = (0, 1)$, und wir definieren in $\bar{I}$:

$$f_n(x) = x^n, \quad x \in \bar{I}$$

$$\text{dann gilt: } \forall x \in \bar{I} : \quad f_n(x) \rightarrow 0, \text{ also } f(x) := \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Die Konvergenz ist nach 7.2.2 1) nicht gleichmäßig, doch es gilt:

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \int_0^1 f(x) dx.$$

Vertauschung von Differentiation und „ $n \rightarrow \infty$ “

Ein hinreichendes Kriterium liefert der folgende

Satz 8.5.4

Es seien $f_n \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, für ein $x_0 \in [a, b]$ konvergiere $(f_n(x_0))_n$ und $(f'_n)_n$ konvergiere gleichmäßig. Dann gilt:

$$\exists f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}) : \quad \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad \|f'_n - f'\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$d.h.: \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)'.$$

Beweis:

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 8.4.3) gilt:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt,$$

(o.B.d.A. sei $x > x_0$, sonst betrachte $\int_x^{x_0} \dots =: - \int_{x_0}^x \dots$).

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + \left| \int_{x_0}^x f'_n(t) - f'_m(t) dt \right| \\ &\leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |b - a| \|f'_n - f'_m\|_\infty \\ &< \varepsilon \quad \text{für } n, m \geq n_0(x_0, \varepsilon). \end{aligned}$$

Da die Abschätzung unabhängig von x ist, konvergiert auch die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig. Sei also f ihr Grenzwert in $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ (vollständig bzgl. der Supremumsnorm nach Folgerung 7.2.11) und g der Grenzwert von $(f'_n)_n$ in $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Lassen wir nun in der ersten Gleichung des Beweises $n \rightarrow \infty$ gehen, so folgt wegen der Konvergenz von $(f_n)_n$ gegen f und der gleichmäßigen Konvergenz von $(f'_n)_n$ gegen g mit Satz 8.5.2:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t) dt,$$

woraus $f' = g$ folgt.

Parameterabhängige Integrale

Seien $I := (a, b)$, $J := (c, d)$ Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : \bar{I} \times \bar{J} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$. Für alle $t \in J$ sei $f(\cdot, t) \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$. Dann ist $F(t) := \int_a^b f(x, t) dx$ wohldefiniert. Man nennt dann t den Parameter und t ist das kontinuierliche Gegenstück zu den vorher behandelten diskreten $n \in \mathbb{N}$. Der folgende Satz liefert entsprechend zu Satz 8.5.2 ein hinreichendes Kriterium für die Vertauschung von Grenzprozessen.

Definition 8.5.5

Eine Funktion $f : \bar{I} \times \bar{J} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ heißt gleichmäßig bezüglich x stetig in t , falls

$$\forall t_0 \in \overset{(-)}{J} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t, |t - t_0| < \delta \quad \forall x \in I : \quad |f(x, t) - f(x, t_0)| < \varepsilon.$$

Satz 8.5.6

Sei f gleichmäßig bezüglich x stetig in t . Dann gilt:

$$F \in \mathcal{C}(\bar{J}, \mathbb{R}), \quad \text{d.h.} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) dx.$$

Beweis:

Es gilt für $|t - t_0| < \delta(t_0, \varepsilon)$:

$$|F(t) - F(t_0)| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(x, t_0)| dx \leq (b - a)\varepsilon.$$

Q.e.d.

In Analogie zu Satz 8.5.4 beweisen wir den folgenden

Satz 8.5.7

Für alle $x \in I, t \in \bar{J}$ existiere

$$g(x, t) := \frac{d}{dt} f(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h}$$

mit i) $\forall t \in \bar{J} : g(\cdot, t) \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$

ii) g ist gleichmäßig bezüglich $x \in I$ stetig in $t \in \bar{J}$.

Dann ist $F \in \mathcal{C}^1(\bar{J}, \mathbb{R})$ mit $F'(t) = \int_a^b g(x, t) dx$, d.h. also:

$$\exists \quad \frac{d}{dt} \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) = \int_a^b \frac{d}{dt} f(x, t) dx.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} &= \int_a^b \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} dx \\ &= \int_a^b g(x, t + \vartheta h) dx \quad \text{mit } \vartheta = \vartheta(x, t) \in (0, 1) \text{ (Mittelwertsatz)} \\ &= \int_a^b g(x, t) dx + \int_a^b (g(x, t + \vartheta h) - g(x, t)) dx \quad . \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeitsvoraussetzungen ii) an g ist der zweite Summand $\leq (b-a) \cdot \varepsilon$ für $|h| < \delta(t, \varepsilon)$.

Also gilt für den Grenzwert $h \rightarrow 0$:

$$\exists F'(t) = \int_a^b g(x, t) dt \Rightarrow F' \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \text{ nach dem vorigen Satz.}$$

Q.e.d.

Der folgende Satz ist ein Spezialfall (für „glatte f “) des Satzes von Fubini (Guido Fubini, 19.1.1879 – 6.6.1943) über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge.

Satz 8.5.8

Es sei $f : \bar{I} \times \bar{J} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, d.h.

$$\forall \xi_0 = (t_0, x_0) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \xi = (x, t), \quad |\xi - \xi_0| \equiv \sqrt{(x - x_0)^2 + (t - t_0)^2} < \delta : \\ |f(\xi) - f(\xi_0)| < \varepsilon .$$

Dann $F \in \mathcal{R}(J, \mathbb{R})$ mit $F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ und $G \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ mit $G(x) = \int_c^d f(x, t) dt$ und es gilt:

$$\int_c^d F(t) dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx = \int_a^b G(x) dx$$

Beweis:

- 1) f ist gleichmäßig stetig (Beweis analog zu Satz 7.1.25) und somit gleichmäßig bezüglich x stetig in t und gleichmäßig bezüglich t stetig in x . Dann ist nach Satz 8.5.5:

$$F \in \mathcal{C}(\bar{J}, \mathbb{R}), \quad G \in \mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R}) \Rightarrow F \in \mathcal{R}(J, \mathbb{R}), \quad G \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$$

- 2) Definiere: $I_1(y) := \int_a^y \int_c^d f(x, t) dt \, dx$ und $I_2(y) := \int_c^d \int_a^y f(x, t) dx \, dt$
- 3) Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 8.4.3) folgt, da G stetig ist:

$$\exists I_1'(y) = \int_c^d f(y, t) dt \quad \text{und} \quad I_1 \in \mathcal{C}^1(\bar{I}, \mathbb{R}).$$

- 4) Für $g(y, t) := \int_a^y f(x, t) dx$ gilt: $\forall y \in \bar{I} : g(y, \cdot) \in \mathcal{C}(\bar{J}, \mathbb{R})$ und $\forall t \in \bar{J} : g(\cdot, t) \in \mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$

Wiederum mit dem Hauptsatz und Satz 8.5.6 bzw. 7.1.25:

$$\exists \frac{d}{dy} g(y, t) = f(y, t) \text{ und } \exists I_2'(y) = \int_c^d f(y, t) dt. \\ \Rightarrow I_1'(y) = I_2'(y) \Rightarrow I_1(y) = I_2(y) + \text{const}, \text{ da } I_1 \text{ und } I_2 \text{ stetig sind. Wegen } I_1(a) = I_2(a) = 0 \text{ folgt } I_1(y) = I_2(y) \text{ und speziell für } y = b \text{ die Behauptung.}$$

Q.e.d.

8.6 Uneigentliche Integrale

Bei der bisherigen Behandlung der Integration haben wir zwei wesentliche Voraussetzungen gemacht:

- i) $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$, d.h. die Funktion f , also der Integrand, ist beschränkt.
- ii) $I = (a, b)$, d.h. das Integrationsgebiet ist beschränkt.

Wir wollen den Integrationsbegriff in diesem Abschnitt bezüglich dieser Eigenschaften durch die sogenannten uneigentlichen Integrale erweitern.

Definition 8.6.1

Es sei $I = (a, b)$, $c \in [a, b]$, f möglicherweise „singulär“ in c , doch es gelte:

$\forall \varepsilon > 0 \quad f \in \mathcal{R}((a, c - \varepsilon), \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{R}((c + \varepsilon, b), \mathbb{R})$ (ε kann natürlich nicht beliebig groß werden und für $c \in \{a, b\}$ gilt nur jeweils eine der Bedingungen.)

O.B.d.A. sei $c \in (a, b)$, dann existieren die Integrale

$$I_1(\varepsilon) := \int_a^{c-\varepsilon} f \quad \text{und} \quad I_2(\varepsilon) := \int_{c+\varepsilon}^b f.$$

Falls die beiden Grenzwerte $I_j := \lim_{\varepsilon \searrow 0} I_j(\varepsilon)$ ($j = 1, 2$) existieren, so nennen wir

$$\int_a^b f := I_1 + I_2 \quad \text{uneigentliches Integral von } f \text{ über } I.$$

Beispiele 8.6.2

i) Sei $I = (-1, 1)$ und $f(x) := \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, $x \neq 0$ und $f(0)$ beliebig definiert. Hier ist also $c = 0$ die „Singularität“, gemäß der vorigen Definition, und es gilt:

$$\int_{\varepsilon}^1 f(x) dx = 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 2 \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{-\varepsilon} f(x) dx = -2\sqrt{-x} \Big|_{-1}^{-\varepsilon} = -2\sqrt{\varepsilon} + 2 \rightarrow 2$$

Also existiert das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$.

ii) Sei $I = (-1, 1)$, $f(x) := \frac{1}{x^3}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 17$.

Es ist $\int_{\varepsilon}^1 f = -\frac{1}{2x^2} \Big|_{\varepsilon}^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\varepsilon^2} \nearrow \infty$ für $\varepsilon \searrow 0$, d.h. das uneigentliche Integral existiert nicht.

Bemerkung 8.6.3

Im letzten Beispiel 8.6.2 ii) existieren zwar die einzelnen Grenzwerte nicht

(auch $\int_{-1}^{-\varepsilon} f = -\frac{1}{2x^2} \Big|_{-1}^{-\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \searrow -\infty$ für $\varepsilon \searrow 0$), aber dennoch konvergiert deren Summe:

$$\int_{\varepsilon}^1 f + \int_{-1}^{-\varepsilon} f = 1, \quad \text{d.h.} \quad p.v. \int_{-1}^1 f = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \int_{-1}^{-\varepsilon} f + \int_{\varepsilon}^1 f \right\} \quad \text{existiert.}$$

Wir nennen dies den Cauchyschen Hauptwert von f (principal value).

Zur Erweiterung auf unbeschränkte Integrationsgebiete machen wir die folgende

Definition 8.6.4

Es sei $D := (a, \infty)$ und $f \in \mathcal{R}((a, \alpha), \mathbb{R})$ für alle $\alpha > a$, d.h. $\forall \alpha > a : \exists I(\alpha) := \int_a^{\alpha} f$.

Existiert nun $I := \lim_{\alpha \rightarrow \infty} I(\alpha)$, so nennen wir $I := \int_a^{\infty} f$ uneigentliches Integral über D .

Entsprechend dieser Definition wird auch das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f$ definiert, wobei die Integrale $\int_0^{\infty} f$

und $\int_{-\infty}^0 f$ getrennt existieren müssen. Ist letzteres nicht der Fall, so können wir in Analogie zu Bemerkung 8.6.3, den Cauchyschen Hauptwert definieren: $p.v. \int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} f$, falls dieser Grenzwert existiert.

Beispiel 8.6.5

Es soll das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

berechnet werden.

- 1) In $x = 0$ liegt keine Singularität vor, da die Abbildung $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ stetig ergänzt werden kann (vgl. Abschnitt 7.5, Regel von de L'Hospital 1), Beispiel i)).

$$2) \int_1^{\alpha} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha} \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \frac{\cos \alpha}{\alpha} - \int_1^{\alpha} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

Die rechte Seite konvergiert für $\alpha \rightarrow \infty$, denn es gilt:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \rightarrow 0 \text{ für } \alpha, \beta \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ Das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ existiert.

- 3) Für $\alpha > 0$ sei

$$f(\alpha) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin \alpha x}{x} dx.$$

Mit einer ähnlichen Argumentation wie eben zeigt man, dass das Integral existiert, ebenso das Integral $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos \alpha x dx$, das wir für die folgende Berechnung von $f'(\alpha)$ brauchen:

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} - \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \alpha x dx &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} \left(\frac{\sin(\alpha+h)x - \sin \alpha x}{h} - x \cos \alpha x \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} (\cos(\alpha + \vartheta h x) - \cos \alpha x) dx, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Mittelwert der Differentialrechnung (Satz 7.5.4) benutzt wurde, wie auch für die folgende Abschätzung:

$$\left| \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} - \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \alpha x dx \right| \leq |h| \int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

Da das Integral auf der rechten Seite existiert und positiv ist, konvergiert die rechte Seite gegen Null, falls $h \rightarrow 0$, d.h.

$$\exists f'(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \alpha x dx.$$

Mit Hilfe mehrfacher partieller Integration zeigt man

$$f'(\alpha) = 1 - \alpha^2 f'(\alpha) \quad \Rightarrow \quad f'(\alpha) = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

und wegen $\arctan' \alpha = \frac{1}{1+\alpha^2}$ folgt (man wähle den Hauptzweig des $\arctan$):

$$f(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \arctan \alpha$$

und mit der Substitution $t = \alpha x$ ergibt sich: $f(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t/\alpha} \sin t}{t} dt.$

4) Wir zeigen

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t/\alpha} \sin t}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt,$$

woraus dann die Behauptung

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \arctan(\alpha) = \frac{\pi}{2}$$

folgt. Es ist:

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{e^{-t/\alpha} \sin t}{t} dt - \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \int_0^A \left| \frac{e^{-t/\alpha} \sin t}{t} - \frac{\sin t}{t} \right| dt + \left| \int_A^{\infty} \frac{e^{-t/\alpha} \sin t}{t} dt \right| + \left| \int_A^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right|$$

$$=: I + II + III$$

Wegen $\left| \frac{e^{-y}-1}{y} \right| = \left| \frac{1-e^y}{ye^y} \right| \leq 1$ für $y > 0$ gilt: $I \leq \int_0^A \frac{1}{\alpha} |\sin t| dt \leq \frac{A}{\alpha} < \frac{\varepsilon}{3}$ für $\alpha \geq \alpha_0(A, \varepsilon)$.

Weiterhin ist $III < \frac{\varepsilon}{3}$ für $A \geq A_0(\varepsilon)$ nach 2).

Um Term II abzuschätzen, benutzen wir partielle Integration. Dazu sei

$$g(t, \alpha) := \frac{-\alpha^2}{1+\alpha^2} e^{-t/\alpha} \left(\cos t + \frac{\sin t}{\alpha} \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} g(t, \alpha) = e^{-t/\alpha} \sin t,$$

wobei die Funktion g von mehreren Variablen abhängt und $\frac{\partial}{\partial t}$ die „partielle“ Ableitung nach t bezeichnet. Es ist $\forall \alpha \geq 1 \quad \forall t > 0 : |g(t, \alpha)| \leq 2$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \forall \alpha \geq 1 : \int_A^B \frac{1}{t} \cdot e^{-t/\alpha} \sin t dt &= \left. \frac{g(t, \alpha)}{t} \right|_{t=A}^{t=B} + \int_A^B \frac{g(t, \alpha)}{t^2} dt \\ &\leq \frac{2}{B} + \frac{2}{A} + 2 \int_A^B \frac{1}{t^2} dt = \frac{2}{B} + \frac{2}{A} - \frac{2}{t} \Big|_A^B \\ &\leq \frac{4}{B} + \frac{4}{A}, \end{aligned}$$

was für $A, B \rightarrow \infty$ konvergiert. Also:

$$II < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für} \quad A \geq A_1(\varepsilon).$$

Wählt man nun $A := \max(A_0(\varepsilon), A_1(\varepsilon)) = A(\varepsilon)$, dann $\alpha \geq \alpha_0(A, \varepsilon) = \alpha_0(\varepsilon)$, so ist

$$I + II + III < \varepsilon$$

und der Grenzwert existiert und konvergiert gegen das Gewünschte.

8.7 Das Riemannsche Integral

Bisher haben die Integrale für Treppenfunktion und dann allgemeiner für Regelfunktionen behandelt, doch reicht dies i.a. für die Anwendungen, etwa in der Physik, nicht aus. Deshalb werden wir später Lebesgue-integrierbare Funktionen einführen. Wegen seiner Anschaulichkeit interessant ist das historisch ältere Riemannsche Integral. Es steht im gewissen Sinn zwischen dem Integral für Regelfunktionen und dem Lebesgueschen Integral. Wir wollen uns in diesem Abschnitt auf eine kurze Andeutung beschränken:

Es sei $I := (a, b)$ ein Intervall und $Z_n := \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Partition von $\bar{I}$. Für $f \in \mathcal{B}(\bar{I}, \mathbb{R})$ sei zu $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n(x) := \sup_{t \in [x_{i-1}, x_i)} f(t) \quad \text{und} \quad f_n(x) := \inf_{t \in [x_{i-1}, x_i)} f(t) \quad \text{jeweils für } x \in [x_{i-1}, x_i),$$

d.h. $f_n, f^n \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R})$. Bezeichnen nun

$$I^n(f) := \int_a^b f^n \quad \text{und} \quad I_n(f) := \int_a^b f_n$$

die Integrale dieser Treppenfunktionen, so sind die $(I^n)_n$ bzw. $(I_n)_n$ monoton wachsend bzw. monoton fallend bei Verfeinerung der Partition. Wegen $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ sind beide Folgen beschränkt, so dass für $\Delta_n = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - x_{i-1}|$ mit $\Delta_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, die folgenden Definitionen Sinn machen.

Definition 8.7.1

i) Mit den obigen Bezeichnungen nennen wir

$$I^*(f) := \inf_n I^n(f) \quad \text{bzw.} \quad I_*(f) := \sup_n I_n(f)$$

oberes bzw. unteres Riemannsches Integral.

ii) Eine Funktion $f \in \mathcal{B}(\bar{I}, \mathbb{R})$ heißt im Riemannschen Sinne integrierbar: $\Leftrightarrow$

$$I^*(f) = I_*(f).$$

Man schreibt dann wieder, falls f Riemann-integrierbar: $I(f) := I_*(f) =: \int_a^b f$ für das Riemannsche Integral von f , was insbesondere dadurch gerechtfertigt wird, dass $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ Riemann-integrierbar ist und das Riemann-Integral mit dem Integral für die Regelfunktion übereinstimmt (für Treppenfunktionen klar, für Regelfunktionen durch Approximation).

Es gelten auch für das Riemann-Integral die üblichen Rechenregeln (vgl. Ende von Abschnitt 8.3) wie z.B.: $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$ oder $|\int_a^b f| \leq (b - a) \|f\|_\infty$.

Wie eben bemerkt, sind Regelfunktionen Riemann-integrierbar sind, doch gibt es auch $f \notin \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ die Riemann-integrierbar, denn es müssen nicht notwendigerweise die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte existieren. Ein Beispiel hierfür kann eine oszillierende Funktion sein:

Beispiel 8.7.2 Sei $I := (0, 1)$

$$f(x) := \begin{cases} 1 + \sin \frac{1}{x} & , \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \quad x = 0, \end{cases}$$

dann ist $f \notin \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$, aber f ist Riemann-integrierbar, denn:

(O.B.d.A. ist eine Umgebung des Nullpunktes interessant.)

In $I_\varepsilon := [0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ klein, gilt:

$$0 \leq I^n(f|_{I_\varepsilon}) \leq \int_0^\varepsilon 2 = 2\varepsilon \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0.$$

$$0 \leq I_n(f|_{I_\varepsilon}) \leq \int_0^\varepsilon 2 = 2\varepsilon \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0$$

$$\Rightarrow |I^n(f|_{I_\varepsilon}) - I_n(f|_{I_\varepsilon})| \leq 4\varepsilon \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0$$

$\Rightarrow$ Das Riemann-Integral $\int_0^\varepsilon f$ existiert.

Allerdings existiert in diesem Fall auch das uneigentliche Integral für Regelfunktionen (vgl. Abschnitt 8.6):

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \sin \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_1^{1/\varepsilon} \frac{\sin t}{t^2} dt \quad (\text{mit der Substitution } \frac{1}{x} = t)$$

existiert, da $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ existiert, d.h. soviel ist bei diesem Beispiel nicht anders als bei Regelfunktionen.

Ausblick

Die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen wird letzten Endes doch zu klein sein. Das liegt daran, dass die für $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ verwandte Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$ zu stark ist (die zugehörige Topologie ist zu fein), besonders für die Anwendungen in der Physik. Daher werden in den Anwendungen oft andere Normen benutzt wie zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &:= \|f\|_{L^1} := \int_I |f| \\ \text{oder} \quad \|f\|_2 &:= \|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_I |f|^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle_2}, \end{aligned}$$

wobei $\langle f, g \rangle := \int_I f \bar{g}$ ein Skalarprodukt (auf dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen) ist. Für diese Normen gilt:

$$\|f\|_1 \leq (b-a) \|f\|_\infty \quad \text{und auch} \quad \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_\infty \quad \text{sowie}$$

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2 \leq (b-a) \|f\|_\infty \quad (\text{Ungleichung von Cauchy \& Schwarz vgl. Satz 5.5.6}).$$

Die Normen sind aber nicht „äquivalent“, so ist f auf $I = (0, 1)$ mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ aus „ L^1 “, aber nicht aus „ L^2 “ oder $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ (siehe später, hier formal: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \infty$, $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \infty$).

Wir werden später $L^1(I, \mathbb{R})$ einführen durch die Vervollständigung von $\mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ unter $\|\cdot\|_1$, vervollständigen also in einer gröberen Topologie (als der von $\|\cdot\|_\infty$ induzierten) und vergrößern

dadurch die Klasse der integrierbaren Funktionen. Daß dies eine echte Erweiterung ist, belegt das folgende

Beispiel 8.7.3

Sei $I := (0, 1)$ und

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap I \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist $f \notin \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ und f ist nicht Riemann-integrierbar, denn $I_*(f) = 0, I^*(f) = 1$, aber es wird $f \in L^1(I, \mathbb{R})$ gelten mit dem Lebesgue-Integral $\int_I f = 0$ (,denn $f = 0$ außerhalb einer „Nullmenge“, wobei hier $\mathbb{Q}$ diese Nullmenge ist, da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist und deswegen „Maß“ Null hat).

9 Reihen von Funktionen

In Kapitel 4 hatten wir bereits Reihen von reellen oder komplexen Zahlen behandelt. Sie hatten die Form $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ mit $a_j \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$ wurde (die n-te) Partialsumme genannt. Wir hatten gezeigt:

die Folge $(s_n)_n$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert $\Rightarrow$ die Folge $(a_n)_n$ ist eine Nullfolge. Außerdem haben wir absolute Konvergenz definiert und gezeigt, dass absolut konvergente Reihen konvergieren. Weiterhin bewiesen wir das Leibniz-, das Majoranten-, das Quotienten- und das Wurzelkriterium für Reihen.

Wie am Ende von Abschnitt 7.2 über Funktionenfolgen angekündigt, wollen wir nun Reihen betrachten, deren Glieder a_j selbst wieder Abbildungen sind.

9.1 Differentiation und Integration

Es sei $I \subset \mathbb{R}$, $a_j \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ($j = 1, 2, \dots$) und $s_n(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x)$. Dann ist $(s_n)_n$ eine Funktionenfolge, für die wir in Abschnitt 7.2 verschiedene Konvergenzbegriffe kenngelernt haben:

- i) Konvergenz für festes $x_0 \in I$: $s_n(x_0) \rightarrow s(x_0)$ für $n \rightarrow \infty$
- ii) punktweise Konvergenz in I : $\forall x \in I : s_n(x) \rightarrow s(x)$ für $n \rightarrow \infty$,
d.h. $\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 : |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$.
- iii) gleichmäßige Konvergenz in I : $\|s_n - s\|_{\infty} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$,
d.h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in I : |s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$.

Entsprechend formuliert man auch für die absolut konvergenten Reihen ($(\sum_{j=1}^n |a_j|)_n$ konvergiert) die verschiedenen Konvergenzbegriffe.

Ein Analogon zum Kriterium der absoluten Konvergenz bei Zahlenreihen ist der folgende

Satz 9.1.1

Es seien $a_n \in \mathcal{BC}(I, \mathbb{R})$ und $c_n \in \mathbb{R}_0^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sum_n c_n$ konvergent, und für alle $x \in I$ gelte:

$$|a_n(x)| \leq c_n.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_n a_n$ absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion.

Beweis:

Die Konvergenz der Reihe folgt aus Satz 7.2.12 und die Stetigkeit der Grenzfunktion wegen der gleichmäßigen Konvergenz mit Satz 7.2.7.

Q.e.d.

Schon im Hilfssatz 7.3.1 haben wir die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Exponentialreihe gezeigt:

Beispiel 9.1.2

Für $x \in (-R, R)$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

Dann ist $|a_n(x)| \leq \frac{R^n}{n!} =: c_n$, und die Reihe $\sum_n c_n$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium (Satz 4.9), denn es gilt:

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \leq \frac{R}{n+1} \leq q < 1 \quad \text{für } n \geq n_0 = [R] \quad (\text{Gaußklammer}).$$

Also konvergiert die Funktionenfolge $(s_n)_n$ mit $s_n = \sum_{j=0}^n \frac{x^j}{j!}$ nach Satz 9.1.1 in $(-R, R)$ absolut und gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $s(x)$.

Aus Satz 9.1.1 wissen wir, dass die Grenzfunktion, gegen die eine Funktionenreihe unter den angegebenen Bedingungen konvergiert, stetig ist. Uns interessiert aber auch, wann (und wie) man integrieren bzw. differenzieren kann.

Satz 9.1.3

Seien $a_j \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $(s_n)_n$ konvergiere gleichmäßig in I gegen die Grenzfunktion s .

Dann ist $s \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ und $\forall \alpha, \beta \in \bar{I}$ gilt:

$$\int_{\alpha}^{\beta} s(x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} a_j(x) dx.$$

(Die Vertauschung von Integration und Grenzübergang ist also erlaubt).

Beweis:

Da $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ vollständig bzgl. der Supremumsnorm ist, gilt $s \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$.

Die Vertauschung der Grenzprozesse ist nach Satz 8.5.3 gerechtfertigt.

Q.e.d.

Nach dem letzten Satz ist also bei Regelfunktionen und gleichmäßiger Konvergenz die gliedweise Integration möglich. Nicht so einfach verhält es sich mit dem Differenzieren, bei dem stärkere Voraussetzungen erfüllt sein müssen, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 9.1.4

Seien $I = (a, b)$, $a_j \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ in $\bar{I}$ differenzierbar, $a_j \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$, $s_n := \sum_{j=1}^n a_j$, $t_n := \sum_{j=1}^n a'_j$,

$t := \sum_{j=1}^{\infty} a'_j \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ und es gelte:

i) $\exists x_0 \in \bar{I} : (s_n(x_0))_n$ konvergiert gegen $s(x_0)$

ii) $\|t_n - t\|_{\infty} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Dann folgt:

$$1) \quad \|s_n - s\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad (\text{d.h.: } \exists s = \sum_{j=1}^{\infty} a_j)$$

2) s ist differenzierbar in $\bar{I}$ mit $s' = t$.

Beweis:

a) Es gilt $s_n \rightarrow s$ gleichmäßig für $n \rightarrow \infty$, denn:

$$\begin{aligned}
 |s_n(x) - s_m(x)| &\leq |(s_n(x) - s_m(x)) - (s_n(x_0) - s_m(x_0))| + |s_n(x_0) - s_m(x_0)| \\
 (n > m) &= \left| \sum_{j=m+1}^n (a_j(x) - a_j(x_0)) \right| + |s_n(x_0) - s_m(x_0)| \\
 (\text{Mittelwertsatz}) &= |x - x_0| \left| \sum_{j=m+1}^n a'_j(\tilde{x}) \right| + |s_n(x_0) - s_m(x_0)| \quad \text{mit } \tilde{x} = \tilde{x}(n, m, x, x_0) \in I \\
 &\leq (b - a) \|t_n - t_m\|_\infty + |s_n(x_0) - s_m(x_0)| \\
 &< \varepsilon \quad \text{für } n, m \geq n_0(\varepsilon, x_0) = n_0(\varepsilon) \quad (x_0 \text{ fest})
 \end{aligned}$$

b) Es existiert $s' = t$, denn:

$$\text{Sei} \quad r_n(x) := \frac{s_n(x) - s_n(x_1)}{x - x_1} - t_n(x_1) \quad \text{für beliebiges, aber festes } x_1 \in \bar{I}.$$

$$\Rightarrow r_n \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_1} r_n(x) = 0, \quad \text{also existiert } s'_n = t_n.$$

$(r_n)_n$ konvergiert gleichmäßig, denn:

$$\begin{aligned}
 r_n(x) - r_m(x) &= \frac{s_n(x) - s_n(x_1) - (s_m(x) - s_m(x_1))}{x - x_1} - (t_n(x_1) - t_m(x_1)) \\
 &= (s'_n - s'_m)(\tilde{x}) - (t_n(x_1) - t_m(x_1)), \quad \tilde{x} = \tilde{x}(n, m, x, x_1) \\
 &= (t_n - t_m)(\tilde{x}) - (t_n(x_1) - t_m(x_1)) \\
 \Rightarrow \quad \|r_n - r_m\|_\infty &\leq 2 \|t_n - t_m\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{für } n, m \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Also ist $(r_n)_n$ Cauchyfolge bzgl. der Supremumsnorm, und da $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ bezüglich derselben vollständig ist, existiert der Grenzwert $r := \|\cdot\|_\infty - \lim_n r_n$

$$\Rightarrow \quad r(x) = \frac{s(x) - s(x_1)}{x - x_1} - t(x_1).$$

c) Es ist $\lim_{x \rightarrow x_1} r(x) = 0$, denn:

$$|r(x)| \leq |r(x) - r_n(x)| + |r_n(x)| < \varepsilon,$$

für gegebenes $\varepsilon > 0$, da der erste Summand wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(s_n)_n$ bzw. $(t_n)_n$ gegen s bzw. t , kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist, falls $n \geq n_0(\varepsilon)$ und der zweite ist $< \frac{\varepsilon}{2}$,

falls $|x - x_0| < \delta(x_1, \varepsilon)$, wegen der in b) gezeigten Konvergenz $\lim_{x \rightarrow x_1} r_n(x) = 0$.

$$\Rightarrow \quad \exists s' = t.$$

Q.e.d.

9.2 Potenzreihen

Eine spezielle Klasse von Reihen von Funktionen sind die sogenannten Potenzreihen, die die Gestalt

$$s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$$

für $a_j \in \mathbb{R}$ (oder auch $\mathbb{C}$) haben. Wir behandeln sie in diesem Abschnitt der Einfachheit halber für $x_0 = 0$. Mit

$$s_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

bezeichnen wir wie üblich die n-te Partialsumme.

Satz 9.2.1

$(s_n)_n$ konvergiere für ein festes $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt:

1) $\forall x \in B(0, |z_0|)$ konvergiert $(s_n(x))_n$, und zwar absolut und gleichmäßig in jedem $\overline{B(0, \alpha)}$ ($= [-\alpha, \alpha]$ im Reellen) für $\alpha < |z_0|$.

2) Es ist $s \in C^\infty(B(0, |z_0|))$ (unendlich oft differenzierbar), und die Ableitungen $s_n^{(k)} \rightarrow s^{(k)}$ konvergieren für alle $k \in \mathbb{N}$ gleichmäßig und absolut in $\overline{B(0, \alpha)}$.

3) Es gilt

$$\int_{\overline{B(0, \alpha)}} s_n \quad \longrightarrow \quad \int_{\overline{B(0, \alpha)}} s \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Bemerkung: Es gilt: s ist in z_0 von innen stetig:

$$\lim_{\substack{\mathbb{R} \ni x \rightarrow z_0 \\ |x| < |z_0|}} s(x) = s(z_0) \quad \underline{\text{Abelscher Grenzwertsatz.}}$$

Beweis:

zu 1) Da die Folge $(s_n(x_0))_n$ konvergiert, muss notwendigerweise $a_n z_0^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gelten.

$$\Rightarrow \exists n_0, \forall n \geq n_0 : |a_n z_0^n| \leq 1.$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n z_0^n \left(\frac{x}{z_0}\right)^n|} \leq \frac{\alpha}{|z_0|} < 1,$$

also folgt mit dem Wurzelkriterium die erste Behauptung.

zu 2) Die Ableitungen der Partialsummen berechnen sich zu:

$$s'_n(x) = \sum_{j=0}^n j a_j z^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} z^j$$

Diese konvergieren gleichmäßig und absolut wegen

$$\sqrt[j]{|(j+1)a_{j+1}x^j|} \leq \sqrt[j]{(j+1)/|z_0|} \frac{\alpha}{|z_0|} \leq q < 1$$

für $j \geq j_0(\frac{\alpha}{|z_0|}, n_0)$ (wobei n_0 wie in 1)).

Also folgt mit Satz 9.1.4:

$$s \in C^1(\overline{B(0, \alpha)}, \mathbb{R}).$$

Die Argumentation lässt sich wiederholen, so dass man auch für alle $k \geq 2$: $s \in C^k(\overline{B(0, \alpha)}, \mathbb{R})$ zeigen kann, woraus sich dann $s \in C^\infty(\overline{B(0, \alpha)}, \mathbb{R})$ ergibt.

zu 3) Diese Aussage ist klar wegen 1).

Q.e.d.

Bemerkung 9.2.2

Die Aussage 2) aus Satz 9.2.1 wird für $x = z_0$ im allgemeinen falsch.

Beispiel:

Für $z_0 = 1$ konvergiert $s_n(x) = \sum_{j=1}^n \frac{x^j}{j^2}$, doch $s'(x) = \sum_{j=1}^n \frac{x^{j-1}}{j}$ divergiert in $z_0 = 1$.

Hilfssatz 9.2.3

Die Potenzreihe $\sum_n a_n x^n$ konvergiere für ein $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann existiert

$$a := \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Beweis:

Aus der Konvergenz der Reihe folgt notwendigerweise $|a_n z_0^n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gelten.

Damit muss aber die Folge $|z_0| \sqrt[n]{|a_n|}$ beschränkt sein.

Q.e.d.

Dieser Zusammenhang zwischen der Konvergenz der Reihe und des angegebenen limes superior bringt uns zur folgenden

Definition 9.2.4

Wir nennen

$$r := \begin{cases} 0 & , \quad \text{falls } \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} \text{ nicht existiert} \\ \frac{1}{a} & , \quad \text{falls } a := \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} \text{ existiert mit } a \neq 0 \\ \infty & , \quad \text{falls } a := \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} \text{ existiert mit } a = 0 \end{cases}$$

den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_j a_j x^j$.

Diese Definition wird insbesondere gerechtfertigt durch:

Satz 9.2.5

Sei r der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_j a_j x^j$. Dann gilt:

- 1) $(s_n(x))_n$ konvergiert absolut für $|x| < r$.
- 2) $(s_n(x))_n$ divergiert für $|x| > r$.
- 3) $(s_n(x))_n$ kann für $|x| = r$ konvergieren oder divergieren ($r < \infty$).

Beweis:

i) $r = 0 \Rightarrow$ Die Reihe konvergiert für kein $z_0 \neq 0$ nach Hilfssatz 9.2.3.

ii) $r = \infty \Rightarrow$ Die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, denn:

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

also ist das Wurzelkriterium erfüllt.

iii) Sei $0 < r < \infty$:

1) Sei $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $|x_1| < r$. Wähle ρ mit $|x_1| < \rho < r$, dann ist

$$\sqrt[n]{|a_n x_1^n|} = |x_1| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{|x_1|}{\rho} < 1 \quad \text{für } n \geq n_0,$$

da $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$ für $n \geq n_0$.

Also konvergiert $(s_n(x_1))_n$ absolut.

2) Es konvergiere die Reihe in x_0 mit $|x_0| > r$.

$\Rightarrow$ Sie konvergiert absolut in x_2 mit $r < |x_2| < |x_0|$ nach Satz 9.2.1.

Dies führen wir zum Widerspruch:

Sei ρ so gewählt, dass $r < \rho < |x_2|$ ($\Rightarrow \frac{1}{\rho} < \frac{1}{r}$).

Dann gibt es eine Teilfolge $(a'_n)_n$ mit

$$\frac{1}{\rho} < \sqrt[n]{|a'_n|} \rightarrow \frac{1}{r}, \quad \text{d.h. also } |a'_n| > \frac{1}{\rho^n}.$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n |a'_j x_2^j| > \sum_{j=1}^n \left(\frac{|x_2|}{\rho} \right)^j > \sum_{j=1}^n 1 = n \rightarrow \infty \quad \text{Widerspruch!}$$

3) Für diese Aussage hier entsprechende Beispiele:

i) Es sei

$$s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{1}{1-x}$$

die geometrische Reihe. Wegen

$$s_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

divergiert die Reihe für $|x| = 1$.

ii) Für $|x| < 1$ sei:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} = -\ln(1-x),$$

denn für $s_n(x) = \sum_{j=1}^n \frac{x^j}{j}$ gilt: $|s_n(x)| \leq \sum_{j=1}^n |x|^j$ also konvergent.

Weiterhin konvergiert $s'_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j$ gegen $\frac{1}{1-x}$.

Also folgt: $s(x) = -\ln(1-x)$.

D.h. die obige Reihe konvergiert für $x = -1$ und divergiert für $x = 1$.

Q.e.d.

Beispiele 9.2.6

1) Die Potenzreihe

$$s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j}$$

konvergiert für $|x| < 1$ (Leibnizsches Kriterium Satz 4.6).

$$s(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$\text{formal: } s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} ((ix)^2)^j = \frac{1}{1-(ix)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Die Konvergenzbeschränkung $r = 1$ ist im Reellen nur schwer zu verstehen, aber im Komplexen hat die Funktion $s(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(1-iz)(1+iz)}$ Singularitäten für $z \in \{-i, i\}$, d.h. für $|z| = 1$.

2) Die Binomialreihe

Behauptung: $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (-1, 1)$ gilt:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

$$\text{wobei} \quad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}, \quad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Beweis:

Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ ist wegen $\binom{\alpha}{n} = 0$ für $n > \alpha$ nichts mehr zu zeigen, denn dann ist dies die Binomische Formel (vgl. Beispiel 2.1.8.3)).

i) Sei $0 < \alpha \notin \mathbb{N}_0$, $n > \alpha > 0$:

$$\Rightarrow \left| \binom{\alpha}{n} \right| = \left| \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{\alpha-1}{1} \cdot \frac{\alpha-2}{2} \cdot \dots \cdot \frac{\alpha-(n-1)}{n-1} \right| = \frac{\alpha}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{j} - 1 \right) \leq \frac{\alpha}{n} \prod_{j=1}^{[\alpha]} \left| \frac{\alpha}{j} - 1 \right| = \frac{\alpha}{n} \cdot c_\alpha \quad ,$$

wobei die letzte Ungleichung wegen $j > [\alpha] \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{j} \leq 1$ richtig ist und die letzte Gleichung mit $c_\alpha := \prod_{j=1}^{[\alpha]} \left| \frac{\alpha}{j} - 1 \right|$.

$$\Rightarrow \quad \lim_n \sqrt[n]{\left| \binom{\alpha}{n} \right|} \leq 1$$

Also gilt für den Konvergenzradius von r von $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$: $r \geq 1$.

ii) $\alpha < 0$: $\beta := -\alpha > 0$. Dann gilt für $n > [\beta]$:

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n} &= (-1)^n \frac{\beta(\beta+1) \cdot \dots \cdot (\beta+n-1)}{1 \cdot \dots \cdot n} = (-1)^n \frac{\beta(\beta+1) \cdot \dots \cdot (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot [\beta] \cdot ([\beta]+1) \cdot \dots \cdot n} \\ &= (-1)^n \frac{1}{[\beta]!} \cdot \frac{\beta}{[\beta]+1} \cdot \frac{\beta+1}{[\beta]+2} \cdot \dots \cdot \frac{\beta+n-1-[\beta]}{n} (\beta+n-[\beta]) \cdot \dots \cdot (\beta+n-1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left| \binom{\alpha}{n} \right| \leq \frac{1}{[\beta]!} (\beta - [\beta] + n) \cdot \dots \cdot (\beta + n - 1) \leq \frac{1}{[\beta]!} (\beta + n - 1)^{[\beta]} \leq c_\beta n^{[\beta]}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{\left| \binom{\alpha}{n} \right|} \leq \sqrt[n]{c_\beta} n^{\frac{[\beta]}{n}} \rightarrow 1 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

(vgl. Beispiele 3.12 1) bzw. 3)).

Also konvergiert auch hier $g(x)$ (absolut) für $|x| < 1$.

Für $|x| < 1$ ist g (unendlich oft) differenzierbar mit

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} \\ \Rightarrow (1+x)g'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left((n+1) \binom{\alpha}{n+1} + n \binom{\alpha}{n} \right) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} \right) \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} x^n \binom{\alpha}{n} = \alpha g(x) \end{aligned}$$

Die Funktion g erfüllt also die Differentialgleichung

$$g'(x) = \frac{\alpha}{1+x} g(x) \quad \text{mit} \quad g(0) = 1.$$

Da g in einer Umgebung $U(0)$ des Nullpunktes stetig ist, gilt dort wegen des positiven Anfangswertes $g > 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^x \frac{g'(t)}{g(t)} dt &= \alpha \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \Rightarrow \ln g(t) \Big|_{t=0}^{t=x} = \alpha \ln(1+t) \Big|_{t=0}^{t=x} \Rightarrow \ln g(x) = \alpha \ln(1+x) \\ &\Rightarrow g(x) = (1+x)^\alpha \text{ in } U(0). \end{aligned}$$

Sei x_0 die dem Betrage nach kleinste Nullstelle von g , sofern sie existiert, also $g(x_0) = 0$ mit $x_0 \in (-1, 1) \Rightarrow 0 = g(x_0) = (1+x_0)^\alpha$. Wegen der Stetigkeit von g und der Funktion $x \mapsto (1+x)^\alpha$ muss $x_0 = -1$ sein. Da dann $x_0 \notin (-1, 1)$ folgt $U(0) = (-1, 1)$ und die Behauptung ist gezeigt.

Q.e.d.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch zeigen, wann zwei Potenzreihen gleich sind.

Satz 9.2.7 (Identitätssatz für Potenzreihen)

Die Potenzreihen $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ seien in einer Umgebung $U(0)$ des Nullpunktes konvergent und $(x_k)_k$ eine Nullfolge, wobei $\forall k \in \mathbb{N}$ gelte:

$$x_k \neq 0 \quad \text{und} \quad A(x_k) = B(x_k).$$

Dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N}: a_n = b_n$, d.h. insbesondere $A(x) = B(x)$ in $U(0)$.

Beweis:

Es gilt:
$$A(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} A(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} B(x_k) = B(0) \Rightarrow a_0 = b_0.$$

Seien $A_1(x) := \sum_{j=1}^n a_j x^{j-1}$ und $B_1(x) := \sum_{j=1}^n b_j x^{j-1}$, dann konvergieren diese Reihe in $U(0)$ mit

$$\begin{aligned} A_1(x_k) &= \frac{A(x_k) - a_0}{x_k} = \frac{B(x_k) - b_0}{x_k} = B_1(x_k) \quad \text{für } x_k \neq 0 \\ &\Rightarrow a_1 = A_1(0) = B_1(0) = b_1. \end{aligned}$$

Diese Argumentation kann man nun immer wieder anwenden und erhält so die Behauptung des Satzes.

Q.e.d.

9.3 Taylorreihen

(benannt nach Brook Taylor, 18.8.1685 – 29.12.1731)

In diesem Abschnitt soll eine vorgegebene Funktion durch eine Potenzreihe approximiert werden. Im einfachsten Fall haben wir schon mit dem Mittelwertsatz eine Approximation gefunden (vgl. Satz 7.5.4 bzw. Beispiel 7.5.6 7)):

$$\begin{aligned}f(x+h) &= f(x) + hf'(x+\vartheta h) \\f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x+\vartheta h),\end{aligned}$$

für ein- bzw. zweimal differenzierbare Funktionen mit $\vartheta = \vartheta(x, h) \in (0, 1)$.

Dies soll für n -mal differenzierbare Funktionen fortgesetzt werden und führt dann zur Taylorschen Formel und schließlich zur Taylorreihe:

Satz 9.3.1

Es seien $f \in \mathcal{C}^n([a, b]; \mathbb{R})$ (n -mal stetig differenzierbar) und $f^{(n)}$ (n -te Ableitung) differenzierbar in (a, b) . Dann gibt es ein $c \in (a, b)$, so dass :

$$f(b) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (b-a)^j + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Beweis:

Zu einem noch zu bestimmenden $m \in \mathbb{R}$ sei

$$g(x) := f(b) - f(a) - f'(x)(b-x) - \dots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (b-x)^n - m \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

dann ist $g(b) = 0$. Wähle nun m so, dass auch $g(a) = 0$ gilt. Es ist g stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) mit der Ableitung (Teleskopsumme):

$$g'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} (b-x)^n + m \frac{(b-x)^n}{n!}.$$

Nach dem Satz von Rolle (Satz 7.5.3) existiert ein $c \in (a, b)$ mit $g'(c) = 0 \Rightarrow m = f^{(n+1)}(c)$

und

$$0 = g(a) = f(b) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (b-a)^j - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1},$$

woraus die behauptete Formel folgt.

Q.e.d.

Den Term

$$\sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (x-a)^j$$

heißt auch „Taylor-Polynom“ der Ordnung n von f an der Stelle a . Die Taylorsche Formel schreibt sich mit $x := a, h := b-a$ und $c \equiv x + \vartheta h$, $0 < \vartheta < 1$ auch in der folgenden Weise:

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j + \frac{f^{(n+1)}(x+\vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

mit dem „Restglied“:

$$R_n(x, h) := \frac{f^{(n+1)}(x+\vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Dies ist die Lagrangesche Form des Restgliedes (Joseph Louis Lagrange, 25.1.1736 – 10.4.1813).

Soll $f(x+h)$ durch das Taylorsche Polynom approximiert werden, so muss das Restglied abgeschätzt werden. Dazu sind oft verschiedene Darstellungen des Restgliedes nützlich. Für $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b], \mathbb{R})$ ergibt sich eine zweite Darstellung direkt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 8.4.3):

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \int_x^{x+h} 1 \cdot f'(t) dt = f(x) + [- (x+h-t) f'(t)]_x^{x+h} + \int_x^{x+h} (x+h-t) f''(t) dt \\ &= f(x) + h f'(x) + [- \frac{(x+h-t)^2}{2} f''(t)]_x^{x+h} + \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^2}{2} f'''(t) dt \\ &= \dots = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j + \int_x^{x+h} \frac{(x+h-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \\ \Rightarrow R_n(x, h) &= \frac{1}{n!} \int_x^{x+h} (x+h-t)^n f^{(n+1)}(t) dt . \end{aligned}$$

Bereits in Folgerung 7.5.6 8) hatten wir hinreichende Kriterien für die Existenz von lokalen Extrema abgeleitet. Diese lassen sich nun mit Hilfe der Taylorschen Formeln erweitern:

Satz 9.3.2

Die Funktion f sei in einer Umgebung $U(x_0)$ von x_0 $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar mit

$$\forall j, \quad 1 \leq j \leq k: \quad f^{(j)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(k+1)}(x_0) \neq 0 .$$

Dann gilt:

- i) k ungerade $\Rightarrow f$ besitzt in x_0 ein lokales Maximum, wenn $f^{(k+1)}(x_0) < 0$, und ein lokales Minimum, wenn $f^{(k+1)}(x_0) > 0$ gilt.
- ii) k gerade $\Rightarrow f$ besitzt in x_0 einen Wendepunkt ($:\Leftrightarrow f'$ besitzt lokales Extremum in x_0).

Beweis:

Es ist:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0+\vartheta h),$$

wobei bei ungeradem k das Vorzeichen von h keine Rolle spielt, sondern nur das von $f^{(k+1)}(x_0+\vartheta h)$ in $U(x_0)$ für $f \in \mathcal{C}^{k+1}$ ausschlaggebend ist (vgl. Folgerung 7.5.6 8)), während man bei geradem k mit der Gleichung

$$f'(x_0 + h) = f'(x_0) + \frac{h^k}{k!} f^{(k+1)}(x_0 + \vartheta' h)$$

argumentiert.

Q.e.d.

Nun wollen wir uns mit der Approximation von f durch das zugehörige Taylor-Polynom beschäftigen, also die Frage klären: Wann gilt

$$R_n(x, h) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty$$

Nach der Definition des Restgliedes muss eine Voraussetzung sicher $f \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$ sein, doch reicht diese i.a. nicht aus, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 9.3.3

Sei $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definiert durch:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Es ist $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ und wegen

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4} + \dots} \leq x^2$$

ist f stetig in 0. Für $x \neq 0$ folgt

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4} + \dots)} \leq 4|x|$$

und es folgt $f'(0) = 0$. Aus

$$\left| \frac{f'(h)}{h} \right| = \frac{1}{h^4} \frac{2}{(1 + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h^4} + \frac{1}{6h^6} + \dots)} \leq 12h^2 \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad h \rightarrow 0$$

folgt $f''(0) = 0$ u.s.w.

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$e^{-\frac{1}{h^2}} = f(h) = R_n(0, h) \quad (h \neq 0)$$

d.h. keine Approximation durch Taylor-Polynome.

Eine hinreichende Bedingung für die Approximation durch Taylorpolynome liefert der folgende

Satz 9.3.4

Sei $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ mit $\exists c > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, b] : |f^{(n)}(x)| \leq c^n$.

Dann gilt:

$$\sup_{x \in [a, b]} \sup_{\substack{|h| \leq h_0 \\ x \pm h \in [a, b]}} |R_n(x, h)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Beweis:

Mit der Lagrangeschen Form des Restglieds folgert man:

$$|R_n(x, h)| \leq \frac{c^{n+1} h_0^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

was man wie die Konvergenz der Exponentialreihe zeigen kann.

Q.e.d.

Beispiele für Funktionen, die die Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllen, sind $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sin x$ oder $x \mapsto \cos x$.

Definition 9.3.5

Sei $f \in C^\infty(U(x), \mathbb{R})$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j$$

die Taylorreihe von f an der Stelle x , sofern die Reihe konvergiert (h hinreichend klein).

Bemerkung 9.3.6

Aus Beispiel 9.3.3 wissen wir, dass aus der Konvergenz der Taylorreihe i.a. noch nicht folgt, dass f durch sie dargestellt wird. (Im angegebenen Beispiel ist die Taylorreihe identisch Null.)

Diese Bemerkung führt nun zur

Definition 9.3.7

Funktionen $f \in C^\infty(U(x), \mathbb{R})$, die durch ihre Taylorreihe in $U(x)$, ($x \in \mathbb{R}$) dargestellt werden, heißen (reell) analytisch (in $U(x)$).

Bemerkung 9.3.8

Warum die glatte Funktion $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ nicht in einer Taylorreihe um $x = 0$ entwickelt werden kann, versteht man erst im Komplexen. Betrachte:

$$z \mapsto e^{-\frac{1}{z^2}} \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Falls $z = iy$ mit $y \in \mathbb{R}$ so folgt

$$e^{-\frac{1}{z^2}} = e^{\frac{1}{y^2}} \rightarrow \infty \quad \text{für } y \rightarrow 0,$$

also hat die Funktion eine Singularität für $z \rightarrow 0$.

Um noch weitere Darstellungen des Restgliedes abzuleiten, benötigen wir den

Satz 9.3.9 (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ und $p \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}_0^+)$, dann gibt es ein $c \in (a, b)$ so dass :

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = f(c) \int_a^b p(x)dx.$$

Beweis:

Der Beweis geht analog zu dem vom normalen Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 8.3.8), wobei man beachte:

$$p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b p(x)dx = 0.$$

Q.e.d.

Ausgehend von der Restglieddarstellung, die wir mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hergeleitet hatten, kommen wir mit obigem Satz zu der

Folgerung 9.3.10

Es war:

$$R_n(x, h) = \frac{1}{n!} \int_x^{x+h} (x+h-t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Somit folgt für $1 \leq p \leq n$:

$$\begin{aligned} R_n(x, h) &= \frac{1}{n!} \int_x^{x+h} (x+h-t)^{p-1} \left((x+h-t)^{n-p+1} f^{(n+1)}(t) \right) dt \\ &= \frac{1}{n!} \left((h(1-\vartheta))^{n-p+1} f^{(n+1)}(x+\vartheta h) \right) \int_x^{x+h} (x+h-t)^{p-1} dt \quad (*) \\ &= (h(1-\vartheta))^{n-p+1} f^{(n+1)}(x+\vartheta h) \frac{h^p}{p n!} \\ \Rightarrow R_n(x, h) &= \frac{h^{n+1}}{p n!} (1-\vartheta)^{n-p+1} f^{(n+1)}(x+\vartheta h) \quad , \end{aligned}$$

wobei wir in Schritt (*) Satz 9.3.9 mit $c = x + \vartheta h$ und $\vartheta = \vartheta(x, h, n, p)$ anwenden.

Dies ist die Schlömilchsche Darstellung, die für $p = n+1$ in die bekannte Lagrangesche Form und für $p = 1$ in die sogenannte Cauchysche Darstellung übergeht (Oscar Xaver Schlömilch, 13.4.1833 – 7.2.1901).

Beispiele 9.3.11

1) Entwickle $f(x) = \ln(1+x)$ für $x \in (-1, 1]$ im Nullpunkt. Es ist:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{(1+x)^n} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Also folgt für die Taylorreihe: $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

Sie hat Konvergenzradius 1, denn für das Restglied in Lagrangescher Form folgt für $x \geq 0$ beliebig:

$$|R_n(0, x)| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\vartheta x)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

Für $-1 < x < 0$ folgt aus der Cauchyschen Darstellung:

$$\begin{aligned} |R_n(0, x)| &= \frac{|x|^{n+1}}{n!} (1-\vartheta)^n \frac{n!}{(1+\vartheta x)^{n+1}} \\ &= \frac{|x|^{n+1}(1-\vartheta)^n}{(1-\vartheta)^n(1+\vartheta x)} \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also haben wir die Taylorentwicklung

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots \text{ in } (-1, 1).$$

2) Sei $f(x) = \arctan x$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1+x^2}$$

(geom. Reihe: $\frac{1}{1-q} = 1 + q + \dots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q}$).

$$\Rightarrow \quad \arctan x = \int_0^x f'(t) dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(0, x)$$

mit $R_n(0, x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt.$

Für $|x| \leq 1$ gilt:

$$|R_n(0, x)| \leq \int_0^x t^{2(n+1)} dt \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

Also lässt sich $\arctan x$ in eine Taylorreihe entwickeln, und speziell für $x = 1$ gilt:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots \quad (= 0,785\dots).$$

9.4 Der Weierstraßsche Approximationssatz

Auch wenn die Taylorreihe nicht konvergiert oder gar nicht definiert ist, kann man Funktionen durch Polynome approximieren:

Satz 9.4.1 (Weierstraßscher Approximationssatz)

Sei $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}_0 \quad \exists P_n, \quad \forall x \in [a, b] : \quad |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon,$$

wobei P_n für $n \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom n -ten Grades ist:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j^{(n)} x^j \quad \text{mit} \quad a_j^{(n)} \in \mathbb{R}.$$

Anders als bei der Taylorreihe hängen die Koeffizienten $a_j^{(n)}$ von n ab, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Zahlen n und $a_j^{(n)}$ i.a. neu bestimmt werden müssen.

Satz 9.4.1 wird in etwas allgemeinerer Form bewiesen. Dazu sei $J := [a, b]$ und H eine monotone, lineare Abbildung von $\mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ in sich, d.h.:

$$H : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \quad \text{linear}$$

$$\text{und} \quad (\forall x \in J : f(x) \leq g(x)) \quad \Rightarrow \quad (\forall x \in J : (Hf)(x) \leq (Hg)(x)).$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt die folgende Verallgemeinerung des Weierstraßschen Approximationssatzes:

Satz 9.4.2

Ist $(H_n)_n$ eine Folge solcher monotoner linearer Abbildungen mit $\|H_n g - g\|_\infty \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $g \in \{x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2\} =: \{1, id, q\}$, so gilt:

$$\forall f \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) : \quad \|H_n f - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

Beweis:

1) Es gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t, x \in J : \quad |f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} (t - x)^2,$$

denn: f ist als stetige Funktion auf der kompakten Menge J gleichmäßig stetig, also folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t, x \in J, \quad |t - x| < \delta : \quad |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Falls $|t - x| \geq \delta$, so folgt:

$$|f(x) - f(t)| \leq 2\|f\|_\infty \leq \frac{2\|f\|_\infty (t - x)^2}{\delta^2},$$

also die behauptete Ungleichung.

2) Sei nun $x \in J$ fest, H_n operiere „bezüglich t “. Dann gilt wegen der Linearität der H_n :

$$(H_n f)(t) - f(x)(H_n 1)(t) = \{H_n(f - f(x))(t)\}$$

und mit 1) bzw. wegen der Monotonie der H_n folgt:

$$\begin{aligned} \{\dots\} &\leq H_n(\varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}(\cdot - x)^2)(t) \\ \text{bzw. } -\{\dots\} &= H_n(-f + f(x))(t) \leq H_n(\varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}(\cdot - x)^2)(t) \\ \Rightarrow |\{\dots\}| &\leq H_n(\varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}(\cdot - x)^2)(t) \\ &= \varepsilon(H_n 1)(t) + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}(H_n q - 2xH_n id + x^2 H_n 1)(t) \end{aligned}$$

Für $t = x$ folgt:

$$\begin{aligned} |(H_n f)(x) - f(x)(H_n 1)(x)| &\leq \varepsilon + \varepsilon|(H_n 1)(x) - 1| + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}[|(H_n q)(x) - x^2| \\ &\quad + 2|x|||(H_n id)(x) - x| + x^2|(H_n 1)(x) - 1|] \\ \Rightarrow \|H_n f - fH_n 1\|_\infty &\leq \varepsilon + \varepsilon\|H_n 1 - 1\|_\infty \\ &\quad + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}[\|H_n q - q\|_\infty + 2c\|H_n id - id\|_\infty + c^2\|H_n 1 - 1\|_\infty] \end{aligned}$$

mit $c = \max\{|a|, |b|\}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|H_n f - f\|_\infty &\leq \|H_n f - fH_n 1\|_\infty + \|f\|_\infty\|H_n 1 - 1\|_\infty \\ &\leq \varepsilon + (\varepsilon + \|f\|_\infty)\|H_n 1 - 1\|_\infty + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}[\dots] \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Q.e.d.

Aus Satz 9.4.2 können wir als Spezialfall den Weierstraßschen Approximationssatz (Satz 9.4.1) beweisen. Dazu zunächst noch folgende

Definition 9.4.3

Für $x \in [0, 1]$ und $n \geq 1$ ist P_n definiert durch

$$(P_n f)(x) := \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

für $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ein Polynom n -ten Grades, das Bernstein-Polynom.

Beweis von Satz 9.4.1:

O.B.d.A. sei $J = [0, 1]$. (Ist $J = [a, b]$, so betrachte $g(t) = f(a + t(b - a))$, $0 \leq t \leq 1$).

Bezeichnet P_n das Bernstein-Polynom n -ten Grades, so ist klar:

$$(\forall x \in J : f(x) \leq g(x)) \Rightarrow (\forall x \in J : (P_n f)(x) \leq (P_n g)(x)),$$

also ist $P_n : \mathcal{C}(J, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ linear und monoton .

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}(P_n 1)(x) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} = (x + (1-x))^n = 1 \\(P_n id)(x) &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \frac{j}{n} = \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} x^j (1-x)^{n-j} \\&= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^{j+1} (1-x)^{n-1-j} = x(x + (1-x))^{n-1} = x \\(P_n q)(x) &= \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^n j^2 \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}\end{aligned}$$

Wegen $\frac{d^2}{da^2}(a+b)^n = n(n-1)(a+b)^{n-2}$ und $\frac{d^2}{da^2} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \sum_{j=2}^n j(j-1) \binom{n}{j} a^{j-2} b^{n-j}$ folgt für $a = x \neq 0$ und $b = 1-x$:

$$\begin{aligned}n(n-1) &= \frac{1}{x^2} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j^2 x^j (1-x)^{n-j} - \frac{1}{x^2} \sum_{j=0}^n j \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \\&= \frac{1}{x^2} \sum_{j=0}^n j^2 \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} - \frac{1}{x^2} x \cdot \frac{d}{da} (a+b)^n \Big|_{\substack{a=x \\ b=1-x}} \\&= \frac{1}{x^2} \sum_{j=0}^n j^2 \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} - \frac{n}{x}\end{aligned}$$

Für $x = 0$ ist $(P_n q)(x) = 0 = q(x)$.

$$\Rightarrow \forall x : (P_n q)(x) = \frac{1}{n^2} (n(n-1) \cdot x^2 + nx) = x^2(1 - \frac{1}{n}) + \frac{x}{n}$$

$$\Rightarrow \|P_n q - q\|_\infty \leq \frac{1}{n} \|q\|_\infty + \frac{1}{n} \|id\|_\infty \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Mit Satz 9.4.2 folgt nun die Behauptung des Satzes 9.4.1.

Q.e.d.

Aus dem Weierstraßschen Approximationssatz können wir also schließen, dass das System der Polynome dicht liegt in $\mathcal{C}(\overline{J}, \mathbb{R})$ (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$). Eine weitere Anwendung des Satzes ist

Satz 9.4.4

Das System der trigonometrischen Summen

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

ist dicht im Raum der stetigen Funktionen der Periode 2π .

Beweis:

Zurückführung auf Satz 9.4.1:

O.B.d.A. sei $J = [-\pi, \pi]$, f stetig und periodisch.

Definiere $f_1(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ und $f_2(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2},$

dann ist $f = f_1 + f_2$, $f_1(-x) = f_1(x)$ eine gerade und $f_2(-x) = -f_2(x)$ eine ungerade Funktion.

- 1) Wir betrachten zunächst f_1 in $[0, \pi]$ und wollen dies durch Cosinusterme approximieren. Durch $t = \cos x$, $x = \arccos t$ wird $[0, \pi]$ bijektiv und stetig auf $[-1, 1]$ abgebildet. Dann ist also $g_1(t) := f_1(\arccos t) = f_1(x)$ stetig in $[-1, 1]$ und kann nach Satz 9.4.1 durch Polynome $P_n(t)$ approximiert werden. Somit wird aber auch $f_1(x)$ durch Polynome $P_n(\cos x)$ approximiert. Mit den Moivreschen Formeln (vgl. Abschnitt 7.3) folgt:

$$\cos^n x = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cos jx,$$

also z.B. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$ oder $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x)$.

$\Rightarrow f$ wird durch eine Summe der Form $a_0 + \sum_{j=1}^n a_j \cos jx$ in $[0, \pi]$ und damit als gerade Funktion auch in $[-\pi, \pi]$ approximiert.

- 2) Es soll f_2 in $[0, \pi]$ durch Sinusterme approximiert werden, doch da die Abbildung $x \mapsto \sin x$ in $(0, \pi]$ nicht invertierbar ist, machen wir folgenden Umweg:

Definiere

$$f_3(x) := f_2(x) \sin x,$$

dann ist f_3 eine gerade Funktion und lässt sich nach 1) durch eine Cosinus-Summe in $[-\pi, \pi]$ approximieren. Also wird $f_2(x) \sin^2 x = f_3(x) \sin x$ durch $\sum_{j=0}^n a_j \cos jx \sin x = a_0 \sin x + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (\sin((j+1)x) - \sin((j-1)x))$ approximiert, d.h.

$$f_2(x) \sin^2 x \sim \text{Sinus-Summe in } [-\pi, \pi].$$

- 3) Mit den Ergebnissen aus 1) und 2) folgern wir, dass sich $f(x) \sin^2 x$ durch trigonometrische Summen approximieren lässt. Dann lässt sich aber auch

$$f(x) \cos^2 x = f(x) \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = f\left(\frac{\pi}{2} - y \right) \sin^2 y \quad (\text{mit } y = \frac{\pi}{2} - x)$$

durch trigonometrische Summen approximieren (in $y \in [-\pi, \pi]$, d.h. $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, doch f ist 2π -periodisch, so auch Approximation in $x \in [-\pi, \pi]$), also schließlich auch

$$f(x) = f(x)(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Q.e.d.

9.5 Orthonormalsysteme

Die Frage nach der Approximation einer gegebenen Funktion durch eine Klasse von Funktionen soll noch etwas vertieft werden, zunächst anknüpfend an den letzten Abschnitt. Sei also wieder

$I := (-\pi, \pi)$ und

$$v_n(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{für } n = 0 \\ \cos kx & \text{für } n = 2k \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \\ \sin kx & \text{für } n = 2k - 1 \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Wie in Satz 9.4.4 gezeigt, folgt aus dem Weierstraßschen Approximationssatz, dass $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, f 2π -periodisch, durch Linearkombinationen der v_n approximiert werden kann.

Die v_n haben nun die folgende Eigenschaft:

$$\int_{-\pi}^{\pi} v_n(x) v_m(x) dx = \delta_{nm} := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{falls } n \neq m \end{cases}$$

(δ_{nm} : Kroneckersymbol, Leopold Kronecker, 7.12.1823–29.12.1891), denn es ist zum Beispiel:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin kx \, dx = \frac{1}{k} \sin^2 kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx \, dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin kx \, dx = 0.$$

Mit

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C} \text{ evtl.})$$

folgt $\langle v_n, v_m \rangle = \delta_{nm}$ für $n, m \in \mathbb{N}_0$ bzw. für $u_n := v_{n-1}$ gilt $\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm}$ für $n, m \in \mathbb{N}$. Die u_n stehen also „senkrecht“ zueinander bzgl. des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definition 9.5.1

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum X (hier: $\mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$), dann nennt man die Menge („Familie“) von Vektoren $\{u_n \in X \mid n \in \mathbb{N}\}$ ein Ortohogonalsystem, falls $\langle u_n, u_m \rangle = c_n \delta_{nm}$, (Kronecker-Symbol δ_{mn}) und Orthonormalsystem, falls $c_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also falls die Vektoren mit $\|u_n\|_2 = \sqrt{\langle u_n, u_n \rangle} = 1$ zu eins normiert sind.

Da $\|\cdot\|_2$ mit obigem Skalarprodukt eine Norm auf $\mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ ist, bilden die angegebenen u_n ($:= v_{n-1}$) ein Orthonormalsystem. Der Raum $\mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$ ist jedoch nicht vollständig bezüglich $\|\cdot\|_2$. Wir werden später genauer den folgenden Raum studieren:

$$L^2 \equiv L^2(I, \mathbb{R}) := \{\mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_2\} \text{ vervollständigt.}$$

Elemente aus L^2 können mit Funktionen identifiziert werden (s. später), wir formulieren deshalb das Nachstehende für $f \in L^2$ statt $f \in \mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$.

Definition 9.5.2

Sei $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein beliebiges Orthonormalsystem in L^2 , $f \in L^2$ (bzw. $\mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R})$). Dann heißt

$$f_n := \langle f, u_n \rangle, n \in \mathbb{N},$$

der n -te Fourierkoeffizient von f und

$$s_n(x) := s_n[f](x) := \sum_{j=1}^n f_j u_j(x)$$

die n -te Partialsumme der Fourierreihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j u_j(x)$$

(Jean-Baptiste-Joseph Fourier, 21.3.1768 – 16.5.1830).

Es stellt sich nun die Frage, ob, wogegen und in welchem Sinne die Fourierreihe konvergiert:

$$„s_n \rightarrow f“ ?$$

(Im Vergleich zur Approximation nach Weierstraß haben wir i) leichtere Bestimmung der Koeffizienten ii) eine größere Klasse zugehöriger f und iii) schwächere Konvergenz.)

Wir haben ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned} \langle s_n, f \rangle &= \sum_{j=1}^n f_j \langle u_j, f \rangle = \sum_{j=1}^n |f_j|^2 \quad \text{und} \quad \langle s_n, s_n \rangle = \sum_{i,j=1}^n f_i \bar{f}_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{j=1}^n |f_j|^2 \\ \Rightarrow \quad \|f - s_n\|_2^2 &= \|f\|_2^2 - 2\operatorname{Re}\langle f, s_n \rangle + \|s_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{j=1}^n |f_j|^2, \end{aligned}$$

die Besselsche Identität (Friedrich Wilhelm Bessel, 22.7.1784 – 17.3.1846), d.h.

$$s_n \rightarrow f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n |f_j|^2 \rightarrow \|f\|_2^2 \quad \text{jeweils für } n \rightarrow \infty.$$

Aus der Besselschen Identität folgt die Besselsche Ungleichung:

$$\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \leq \|f\|_2^2$$

und somit die Konvergenz von $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2$. Ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 = \|f\|_2^2,$$

so heißt dies die Parsevalsche Gleichung für f (Marc-Antoine Parseval des Chénés, 27.4.1755–16.8.1836).

Zusammenfassend haben wir den folgenden

Satz 9.5.3

Sei $f \in (L^2(I, \mathbb{R})) \cap \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$. Dann gilt:

- 1) $\sum_{j=1}^n |f_j|^2 \leq \|f\|_2^2$
- 2) $\|s_n[f]\|_2 \leq \|f\|_2$
- 3) $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 = \|f\|_2^2 \Leftrightarrow \|f - s_n\|_2 \rightarrow 0$
- 4) $(s_n)_n$ konvergiert in L^2 , d.h. bzgl. $\|\cdot\|_2$.

Beweis:

Die Punkte 1) – 3) hatten wir bereits gezeigt und 4) folgt aus:

$$\|s_n - s_m\|_2^2 = \sum_{j=m+1}^n |f_j|^2 \quad (m < n).$$

Q.e.d.

Der letzte Satz und die Parsevalsche Gleichung führen uns zur

Definition 9.5.4

Ein Orthonormalsystem (ONS) $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ heißt vollständig in $L^2(I, \mathbb{C})$ (VONS) : $\Leftrightarrow$

$$\forall f \in L^2(I, \mathbb{C}) : \sum_{j=1}^{\infty} |f_j|^2 = \|f\|_2^2$$

Das gerade bewiesene Kriterium für die Vollständigkeit des Orthonormalsystems $\{u_n\}_n$ lässt sich in den Voraussetzungen noch etwas abschwächen:

Satz 9.5.5

A sei in $L^2(I, \mathbb{C})$ dicht. Die Parsevalsche Gleichung gelte für alle $g \in A$. Dann ist das ONS $\{u_n\}_n$ vollständig.

Beweis:

Sei $f \in L^2(I, \mathbb{C})$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Dann gibt, weil $A \subset L^2(I, \mathbb{C})$ dicht ist, ein $g \in A$:

$$\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Aus $\|f - s_n[f]\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - s_n[g]\|_2 + \|s_n[g] - s_n[f]\|_2$ folgt dann mit der Besselschen Ungleichung $\|s_n[g] - s_n[f]\|_2 = \|s_n[g - f]\|_2 \leq \|g - f\|_2$:

$$\begin{aligned} \|f - s_n[f]\|_2 &\leq 2\|f - g\|_2 + \|g - s_n[g]\|_2 \\ &< 2\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{für } n \geq n_0(\varepsilon, g) = n_0(\varepsilon) \end{aligned}$$

Q.e.d.

Als dichte Teilmenge kann man beispielsweise wählen $A = \mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{C})$.

Eine weitere wichtige Charakterisierung von vollständigen Orthonormalsystemen (VONS) liefert

Satz 9.5.6

Das ONS $\{u_n\}_n$ ist vollständig in $L^2(I, \mathbb{C}) \Leftrightarrow \forall f \in L^2(I, \mathbb{C}) : (\forall n \in \mathbb{N} : f_n = 0) \Rightarrow f = 0$.

Beweis:

„ $\Rightarrow$ “: Da $\{u_n\}_n$ vollständig gilt, falls $f_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad (\text{in } L^2(I, \mathbb{C}))$$

„ $\Leftarrow$ “ : Sei $f \in L^2(I, \mathbb{C})$. Dann ist $f^* := \sum_{j=1}^{\infty} f_j u_j \in L^2(I, \mathbb{C})$ sinnvoll definiert, da $(s_n[f])_n$ Cauchyfolge in $L^2(I, \mathbb{C})$ und es sei $g := f - f^*$. Dann gilt: $\langle f^*, u_n \rangle = f_n$
 $\Rightarrow \forall n : g_n = 0 \Rightarrow g = 0 \Leftrightarrow f = f^*$.

Q.e.d.

Nun noch einige Beispiele für vollständige Orthonormalsysteme.

Beispiele 9.5.7

1) *Klassische Fourierreihe in $I = (-\pi, \pi)$:*

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $u_n = v_{n-1}$ (wobei die v_n wie zu Beginn dieses Abschnitts durch $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots$ definiert). Dann ist das ONS $\{u_n\}_n$ vollständig, denn:

Sei $A := \{g \in \mathcal{C}(\bar{I}, \mathbb{R}) \mid g \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}\}$, dann ist $A \subset L^2(I, \mathbb{R})$ dicht. Weiter sei $h \in L^2(I, \mathbb{R})$ mit $h_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $g \in A$ mit

$$\|h - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz (Satz 9.4.1) bzw. Satz 9.4.2 gibt es ein $N = N(\varepsilon)$ und $\alpha_1(\varepsilon), \dots, \alpha_{N(\varepsilon)}(\varepsilon)$, so dass

$$\begin{aligned} \|g - \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j\|_\infty &< \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}} \\ \Rightarrow \|h - \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j\|_2 &\leq \|h - g\|_2 + \|g - \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{2\pi} \|g - \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j\|_\infty < \varepsilon \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung $h_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ folgt jetzt

$$\|h\|^2 + \sum_{j=1}^N |\alpha_j|^2 = \|h - \sum_{j=1}^N \alpha_j u_j\|_2^2 < \varepsilon^2.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt: $\|h\| = 0 \Rightarrow h = 0$ und somit nach Satz 9.5.7 die Vollständigkeit des ONS, auf das wir im nächsten Abschnitt noch etwas näher eingehen werden.

2) Sei $I := (a, b)$ und $v_j(x) := x^{j-1}$ für $j \in \mathbb{N}$. Da die v_j weder senkrecht (bzgl. des L^2 -Skalarproduktes $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$) senkrecht zueinander stehen noch auf eins normiert sind, benutzen wir das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren (Erhard Schmidt, 13.1.1876 – 6.12.1959).

Allgemein sieht dies wie folgt aus:

Sei $\{v_1, \dots\}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren (wie die obigen Monome).

Man definiert

$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|_2}.$$

Aus dem Ansatz

$$w_2 \stackrel{!}{=} c_{21} u_1 + v_2$$

und der Orthogonalitätsforderung $0 \stackrel{!}{=} \langle w_2, u_1 \rangle = c_{21} + \langle v_2, u_1 \rangle$ folgt $c_{21} = -\langle v_2, u_1 \rangle$.

Nun setzt man für die Normierung $u_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|_2}$, wobei $w_2 \neq 0$ wegen der linearen Unabhängigkeit der v_j . Jetzt macht man den Ansatz:

$$w_3 \stackrel{!}{=} c_{31} u_1 + c_{32} u_2 + v_3$$

und fordert $\langle w_3, u_1 \rangle = \langle w_3, u_2 \rangle = 0$ und bestimmt hieraus $u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|_2}$. Man geht also sukzessiv vor. Für $n \geq 2$ macht man den Ansatz

$$w_n \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^{n-1} c_{nj} u_j + v_n,$$

wobei man $\langle w_n, u_j \rangle = 0$ für $j = 1, \dots, n-1$ fordert und die u_j bereits bekannt sind, woraus

$$\begin{aligned} c_{nj} &= -\langle v_n, u_j \rangle \quad \text{für } j = 1, \dots, n-1 \\ \text{und somit} \quad w_n &= -\sum_{j=1}^{n-1} \langle v_n, u_j \rangle u_j + v_n \quad \text{folgt.} \end{aligned}$$

Hieraus erhält man nun das nächste

$$u_n := \frac{w_n}{\|w_n\|_2}.$$

Nach Konstruktion stehen die u_n senkrecht aufeinander und sind auf eins normiert, bilden also ein ONS mit $\text{span} \{v_1, \dots, v_n\} = \text{span} \{u_1, \dots, u_n\}$ (lineare Hülle).

Für $I = (-1, 1)$ erhält man die Legendre-Polynome: ($u_n = P_{n-1}$):

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1), \\ P_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{9}{2}}(35x^4 - 30x^2 + 3) \quad \text{usw.,} \end{aligned}$$

allgemein gilt:

$$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x^2 - 1)^n.$$

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir noch eine Aussage über die Approximation durch Fourierreihen beweisen:

Satz 9.5.8

Die Fourierreihe liefert die beste Approximation in L^2 („im quadratischen Mittel“) bezüglich eines gegebenen ONS $\{u_n\}_n$.

Beweis:

Seien $a_j \in \mathbb{C}$ für $j \in \mathbb{N}$, $f \in L^2(I, \mathbb{R})$ und für festes n sei $D := \|f - \sum_{j=1}^n a_j u_j\|_2^2$, dann folgt:

$$D = \|f\|_2^2 - 2\text{Re} \sum_{j=1}^n f_j \overline{a_j} + \sum_{j=1}^n |a_j|^2 = (\|f\|_2^2 - \sum_{j=1}^n |f_j|^2) + \sum_{j=1}^n |a_j - f_j|^2.$$

Da mit der Besselschen Ungleichung $(\|f\|_2^2 - \sum_{j=1}^n |f_j|^2) \geq 0$ ist, wird D minimal für $a_j = f_j$.

Q.e.d.

Die natürliche Frage, wann bzgl. L^2 konvergente Fourierreihen auch punktweise konvergieren, wird uns in dem nun folgenden letzten Abschnitt dieses Kapitels beschäftigen.

9.6 Fourierreihen

In diesem letzten Abschnitt wollen wir wie angekündigt die klassischen Fourierreihen, die trigonometrischen Reihen, etwas genauer betrachten. Sei also wie zu Beginn von Abschnitt 9.5

$$v_n(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } n = 0 \\ \cos kx & \text{für } n = 2k \\ \sin kx & \text{für } n = 2k - 1 \end{cases}$$

für $x \in I := (-\pi, \pi)$.

Unser Ziel ist es also nun, f in der Form

$$f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

darzustellen, wobei

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos jx \, dx \quad \text{und} \quad b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin jx \, dx.$$

Für die komplexe Schreibweise sei $\{u_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definiert durch:

$$u_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos nx + i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin nx$$

$\Rightarrow \{u_n\}$ ist ein ONS in $L^2(I, \mathbb{C})$ und vollständig. Für $n \in \mathbb{N}$ ist dann

$$v_0 = u_0, \quad v_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_n + u_{-n}) \quad \text{und} \quad v_{2n-1} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(u_n - u_{-n})$$

Also gilt für obiges:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f_n + f_{-n}) \quad \text{und} \quad b_n = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} (f_n - f_{-n})$$

mit

$$f_n := \langle f, u_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Zur Konvergenz der Fourierreihe beweisen wir nun folgenden

Satz 9.6.1

Die Funktion f sei in $[-\pi, \pi]$ stetig und stückweise stetig differenzierbar mit $f(-\pi) = f(\pi)$.

Dann gilt:

1) Die Fourierreihe zu f konvergiert absolut und gleichmäßig

$$2) \|f - \sum_{j=-n}^n f_j u_j\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \|f'\|_2 \quad (\text{Fehlerabschätzung})$$

Beweis:

Da f' nach Voraussetzung stückweise stetig ist, ist f' eine Regelfunktion, woraus $f' \in L^2(I, \mathbb{C})$ folgt. Seien f_n bzw. f'_n die Fourierkoeffizienten von f bzw. f' , dann gilt:

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(-in)} f(x) e^{-inx} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{in} f'_n \end{aligned}$$

Die Regel der partiellen Integration ist hier anwendbar, da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Die Randterme heben sich wegen der Periodizität von f weg. Somit folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{|j|>n} |f_j u_j(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|j|>n} |f_j| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|j|>n} \left| \frac{f'_j}{j} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\sum_{|j|>n} \frac{1}{j^2}} \sqrt{\sum_{|j|>n} |f'_j|^2} \quad (\text{Cauchy \& Schwarz}) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f'\|_2 \sqrt{\sum_{|j|>n} \frac{1}{j^2}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

d.h. bedeutet absolute und gleichmäßige Konvergenz liegt vor. Der obige Wurzelterm konvergiert gegen Null, da für $m > 1$ gilt:

$$\sum_{j=m}^n \frac{1}{j^2} \leq \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq \int_m^{\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx = \frac{-1}{x-1} \Big|_m^{\infty} = \frac{1}{m-1} \rightarrow 0 \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

(Vgl. auch Beispiel 4.11.)

Es folgt also insbesondere auch:

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für } n > 0$$

Aus der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_j f_j u_j(x)$ folgt, dass die Folge der Partialsummen bezüglich der Supremumsnorm gegen eine stetige Funktion konvergiert:

$$\begin{aligned} \exists f^* : s_n[f] &\xrightarrow{\|\cdot\|_{\infty}} f^* \in \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad s_n[f] \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f^* \quad (\text{hier: } \|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2\pi} \|\cdot\|_{\infty}) \\ &\Rightarrow f = f^* \quad , \quad \text{da } s_n[f] \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f \quad \text{wegen der Vollständigkeit von } \{u_n\}, \end{aligned}$$

also ist die erste Behauptung bewiesen.

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{j=-n}^n f_j u_j\|_{\infty} &= \sum_{\substack{|j|>n \\ j \in \mathbb{Z}}} \|f_j u_j\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f'\|_2 \sqrt{2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{n}} \|f'\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \|f'\|_2, \end{aligned}$$

also folgt 2).

Q.e.d.

Beispiel 9.6.2

Betrachte die Funktion $f(x) = |x|$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$, die durch periodische Fortsetzung (mit der Periode 2π) auf ganz $\mathbb{R}$ zur „Sägezahnfunktion“ wird. Diese Funktion ist stetig und stückweise stetig differenzierbar in $[-\pi, \pi]$, erfüllt also die Voraussetzungen von Satz 9.6.1.

Es ist:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx &= -\int_{-\pi}^0 xe^{-inx} dx + \int_0^{\pi} xe^{-inx} dx \\ &= \int_0^{\pi} t(e^{int} + e^{-int}) dt = 2 \int_0^{\pi} t \cos nt \, dt\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_0 = \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{und} \quad f_n = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2} = \begin{cases} -\frac{4}{\sqrt{2\pi}n^2} & n = 2k-1, \, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{inx} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)\end{aligned}$$

Speziell in $x = 0$ gilt:

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right).$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}f'(x) &= \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{für } -\pi < x < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \|f'\|_2 = \sqrt{2\pi} &\Rightarrow \|f - \sum_{t=-n}^n f_j u_j\|_{\infty} \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.\end{aligned}$$

Schon gegen Ende von Abschnitt 7.3 haben wir zur Berechnung von $\frac{\pi}{2}$ eine Iteration angegeben, die dagegen konvergiert. Eine andere Art der Zahl „ π “ näher zu kommen, liefert die

Folgerung 9.6.3

Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Beweis:

Definiere $s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow s &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) \\ \Rightarrow \frac{3}{4}s &= \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - f(0)\right) = \frac{\pi^2}{8} \\ &\Rightarrow s = \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

Q.e.d.

Für die Fourierreihen haben wir bisher erkannt:

Punktweise, sogar gleichmäßige Konvergenz liegt vor, wenn f stetig und f' stückweise stetig ist. Die Stetigkeit von f alleine reicht i.a. nicht aus (Gegenbeispiele). Andererseits muss f nicht stetig sein, denn Sprungstellen lassen sich behandeln, wenn man auf die Konvergenz in diesen Punkten verzichtet bzw. f geeignet abändert. Ein Beispiel soll dies veranschaulichen:

Beispiel 9.6.4

Sei

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } -\pi < x < \pi \\ \alpha & \text{für } x = -\pi \\ \beta & \text{für } x = \pi \end{cases} \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Dann folgt: $f_0 = 0$ und für $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} f_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} f(x) e^{-inx} dx = \frac{x e^{-inx}}{-in} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} dx \\ &= \frac{2\pi i}{n} (-1)^n \quad (\text{da } \cos(n\pi) = (-1)^n) \\ &\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 \quad \text{konvergiert.} \end{aligned}$$

Sei $f^* := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n u_n$ in $L^2(I, \mathbb{C})$. Formal berechnet man:

$$f^*(x) = i \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^n e^{inx}}{n} = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \mp \dots \right)$$

Es ist $f^* = f$, da das ONS $\{u_n\}$ vollständig ist ($\Rightarrow f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n u_n$ in L^2).

Wir stellen nun die Frage nach punktweiser Konvergenz, d.h. gilt für $F_n(x) := \sum_{j=-n}^n f_j u_j(x)$, dass $F_n(x) \rightarrow f(x)$ konvergiert?

Dazu sei

$$g(x) := f(x)(1 + e^{ix}),$$

dann hat g keine Sprungstelle mehr (da $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$, also $g(\pm\pi) = 0$). Die Funktion g ist stetig und stückweise stetig differenzierbar, also lässt sich g nach Satz 9.6.1 in eine gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln. Aus

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(n-1)x} dx$$

folgt:

$$g_n = f_n + f_{n-1}.$$

Sei $G_n(x) := \sum_{j=-n}^n g_j u_j(x)$ dann gilt:

$$\begin{aligned}(1 + e^{ix})F_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sum_{j=-n}^n f_j e^{ijx} + \sum_{j=-n}^n f_j e^{i(j+1)x} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sum_{j=-n}^n (f_j + f_{j-1}) e^{ijx} + f_n e^{i(n+1)x} - f_{-n-1} e^{-inx} \right) \\ &= G_n(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f_n e^{i(n+1)x} - f_{-n-1} e^{-inx})\end{aligned}$$

Wegen $f_n \rightarrow 0$ und $\|G_n - g\|_\infty \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ folgt:

$$\begin{aligned}\|(1 + e^{i\cdot})F_n - g\|_\infty &\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \\ \Rightarrow \|(1 + e^{i\cdot})(F_n - f)\|_\infty &\rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow F_n \rightarrow f$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Intervall, das die Punkte $x = -\pi$ und $x = \pi$ nicht enthält (damit $|1 + e^{iy}| \geq c > 0$ ist). Es gilt auch $F_n(\pm\pi) = 0$, d.h. in $x \in \{-\pi, \pi\}$ liegt punktweise Konvergenz vor, falls $\alpha = \beta = 0$ gilt, d.h. falls

$$f(\pi) = \frac{1}{2}(f(\pi+0) + f(\pi-0)) \quad (\text{analog für } -\pi)$$

(typische Situation).

Zum Abschluss dieses Kapitels beweisen wir noch die Poissonsche Integralformel: (Simon Denis Poisson, 21.6.1781 – 25.4.1840)

Satz 9.6.5

Es sei $f \in \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ mit $f(0) = f(2\pi)$. Dann gilt:

$$\forall \varphi \in [0, 2\pi] : \quad f(\varphi) = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ 0 < r < 1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\varphi-z) + r^2} dz.$$

Beweis:

- 1) Für $0 \leq r \leq r_0 < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\varphi)$ bezüglich φ gleichmäßig und absolut. (Man nehme die geometrische Reihe als Majorante.) Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi &= \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\varphi} = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - re^{i\varphi}} \\ &= \operatorname{Re} \frac{1 - re^{-i\varphi}}{|1 - re^{i\varphi}|^2} = \frac{1 - r \cos \varphi}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} \\ \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\varphi} &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi \\ &= -1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\varphi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow v(r, \varphi) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-z)+r^2} dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\varphi-z)} \right) dz \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} f_n u_n(\varphi)
\end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe richtig ist.

2) Der Satz ist für $f = 1$ richtig, denn dann ist nur $f_0 = \sqrt{2\pi}$ von Null verschieden.

$$\Rightarrow v(r, \varphi) = f_0 u_0(\varphi) = 1.$$

3) Da f nach Voraussetzung periodisch ist, gilt

$$\begin{aligned}
v(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{(1-r^2)f(\varphi+\chi)}{1-2r\cos\chi+r^2} d\chi \\
&= f(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)(f(\varphi+\chi)-f(\varphi))}{1-2r\cos\chi+r^2} d\chi
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt das Ergebnis für $f = 1$ aus 2) benutzt wurde.

Es bleibt nun zu zeigen, dass das letzte Integral für $r \nearrow 1$ gegen Null konvergiert. Dazu teile man das Integral wie folgt auf:

$$\int_0^{2\pi} \dots = \int_0^{\alpha} \dots + \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \dots + \int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} \dots$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben:

a) Für $\int_0^{\alpha} \dots$ bzw. $\int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} \dots$ hat man:

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{\alpha} \dots \right| &\leq \sup_{x \in (0, \alpha)} |f(\varphi+x) - f(\varphi)| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\chi+r^2} d\chi \\
&\stackrel{2)}{=} \sup_{x \in (0, \alpha)} |f(\varphi+x) - f(\varphi)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } \alpha < \delta_1(\varepsilon),
\end{aligned}$$

da f gleichmäßig stetig unabhängig von r . Analog gehe man für das Integral $\int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} \dots$ vor.

b) Sei $\alpha < \min\{1, \delta_1(\varepsilon)\}$ fest und $r \geq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left| \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \dots \right| &\leq 2\|f\|_{\infty} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\alpha+r^2} \leq 2\|f\|_{\infty} \frac{1-r^2}{(1-r)^2 + (1-\cos\alpha)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } 1-r < \delta_2(\varepsilon, \alpha) = \delta_2(\varepsilon)
\end{aligned}$$

(denn: $1-2r\cos\alpha+r^2 \geq (1-r)^2 + (1-\cos\alpha) \Leftrightarrow r \geq \frac{1}{2}$).

Q.e.d.

Bemerkungen 9.6.6

- 1) Aus der Poissonschen Integralformel folgt wieder die Vollständigkeit der $\{u_n\}$, denn:
 f ist stetig mit $f_n = 0$ für alle $n \Rightarrow v(r, \varphi) = 0$ für alle $r, \varphi \Rightarrow f(\varphi) = 0$ für $\varphi \in [0, 2\pi]$.
- 2) Die Bedeutung der Poissonschen Integralformel liegt bei der Anwendung in der „Potentialtheorie“:

Die Funktion $u(x) := V(r, \varphi)$ für $x = (x_1, x_2) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in G = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ (Polarkoordinaten) löst die „Randwertaufgabe“:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) u(x_1, x_2) = 0 \text{ in } G \\ u = f \text{ auf } \partial G := \text{Rand von } G \\ u \in \mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G}), \end{cases}$$

wobei die Annahme der Randwerte so zu verstehen ist, dass a stetig auf $\overline{G}$ fortgesetzt werden kann und $\lim_{r \rightarrow 1} u(r, \varphi) = f(\varphi)$ gilt (Satz 9.6.5).

Literatur

- [B, F] Barner, M., Flohr, F.: Analysis I (1974), II (1983); de Gruyter, Berlin.
- [Cou] Courant, R.: Vorlesung über Differential- und Integralrechnung 1 (1971), 2 (1972); Springer-Verlag, Berlin.
- [Heu] Heuser, H.: Lehrbuch der Analysis 1 (1980), 2 (1981); Springer-Verlag, Berlin.
- [Lan] Landau, E.: Grundlagen der Analysis; Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt (1970).
- [Lang] Lang, S.: Analysis I (1968), II (1969); Addison-Wesley Publishing Company, Reading.
- [M, K] v. Mangoldt, H., Knopp, K.: Einführung in die Höhere Mathematik 1-4; S. Hirzel Verlag, Stuttgart (1974).
- [Wal] Walter, W.: Analysis 1 (1990), 2 (1991); Springer-Verlag, Berlin.

Index

- $\aleph$, 24
- π , 57, 121
- Abbildung, 4, 41
 - beschränkte, 42
 - kontrahierende, 26
- Abelscher Grenzwertsatz, 97
- abgeschlossen, 27
- Ableitung, 62
 - partielle, 90
- Abschluss, 27
- Absolutbetrag, 11
- abzählbar, 22
- Äquivalenz, 5
- Äquivalenzklasse, 17
- Äquivalenzrelation, 8
- analytisch, 106
- antisymmetrisch, 8
- $\arccos$, 58
- $\arcsin$, 58
- $\arctan$, 108
- Assoziativgesetz, 7
- Aussage, 5
- Banachraum, 35
- Banachscher Fixpunktsatz, 26
- Bernoullische Ungleichung, 9
- Bernstein-Polynom, 110
- beschränkt, 11, 28
- Besselsche Identität, 114
- Besselsche Ungleichung, 114
- Bijektion, 22
- bijektiv, 5
- Bild, 4
- Binomialkoeffizient, 10
- Binomialreihe, 100
- binomische Formel, 10
- Cantorsches Diagonalverfahren, 23
- Cauchy & Schwarzsche Ungleichung, 35
- Cauchyfolge, 14
- Cauchykonvergenz, 50
- Cauchysche Darstellung, 107
- Cauchyscher Hauptwert, 88
- $\cos$, 53
- $\cosh$, 58
- Definitionsbereich, 4
- Dezimalsystem, 37
- dicht, 25
- Differenzierbarkeit, 59
 - linksseitige, 59
 - rechtsseitige, 59
 - stetige, 60
- Distributivgesetz, 7
- divergent, 19
- Dreiecksungleichung, 11
- e , 39
 - Funktion, 53
- eindeutig, 5
- erweiterter Mittelwertsatz, 65
 - der Integralrechnung, 107
- Eulersche Zahl, 39
- Exponentialfunktion, 53
- Extremwertaufgabe, 66
- Fixpunktgleichung, 26
- Flächeninhalt, 73
- Folge, 14
- Fourierkoeffizient, 113
- Fourierreihe, 114
- Funktion, 4
 - stetige Ergänzung einer, 44
- Gaußklammer, 41

geometrische Reihe, 99
 glatt, 59
 Graph, 4
 Grenzwert, 14, 25, 43
 linksseitiger, 43
 rechtsseitiger, 43
 Gruppe, 10
 Häufungspunkt, 27
 harmonische Reihe, 19
 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 82
 Hausdorffraum, 29
 Hausdorffsches Trennungsaxiom, 29
 Heaviside-Funktion, 42
 Heine-Borel-Eigenschaft, 31
 Hexadezimalsystem, 37
 Hilbertraum, 36
 Hölderexponent, 47
 Hölderstetig, 47
 de L'Hospital'sche Regel, 67
 Hyperbelfunktionen, 58
 idempotent, 3
 Identitätssatz für Potenzreihen, 102
 imaginär, 13
 Imaginärteil, 13
 Implikation, 5
 Indexmenge, 30
 Infimum, 11
 Inhalt, 73
 injektiv, 5
 innerer Punkt, 27
 Integral
 parameterabhängiges, 85
 Riemannsches, 91
 unbestimmtes, 69
 uneigentliches, 87, 88
 Integration, partielle, 70
 Intervallschachtelung, 32
 inverses Element, 10
 isolierter Punkt, 27
 isometrisch, 25
 Körper, 12
 Kardinalität, 22
 Kardinalzahl, 24
 Kettenregel, 61
 Körper, 10
 Kommutativ, 3
 Kommutativgesetz, 7
 kompakt, 31
 Komplement einer Menge, 27
 Komposition, 4
 konjugiert, 13
 Kontinuumshypothese, 24
 kontrahierend, 26
 konvergent, 14, 94
 absolut, 19
 Cauchy-, 14, 50
 gleichmäßig, 50, 51
 punktweise, 50, 51
 konvergente Reihe, 19
 Konvergenzradius, 98
 Kroneckersymbol, 113
 Kugel, 25
 Leibniz-Kriterium, 20
 limes
 inferior, 30
 superior, 30
 linear, 109
 Lipschitz-beschränkt, 42
 Logarithmus, 53
 naturalis, 54
 Mächtigkeit, 22

Maß, 73	Identitätssatz, 102
Majorantenkriterium, 20	Konvergenz einer, 99
Maximum, 12	Produkt, 7
lokales, 63	inneres, 35
Menge, 3	Produktregel, 60
Metrik, 24	Quotientenkriterium, 20
diskrete, 25	Quotientenregel, 60
Minimum, 12	
lokales, 63	Rand, 28
Mittelwertsatz	Randpunkt, 28
der Differentialrechnung, 64	rational, 40
der Integralrechnung, 80	Raum, 41
de Moivresche Formeln, 57	metrischer, 24
monoton (streng), 15	normierter, 35
de Morgansche Regel, 6	topologischer, 30
	Realteil, 13
Negation, 5	reflexiv, 8
neutrales Element, 10	Regelfunktion, 77
Norm, 34	Reihe
Nullfolge, 14	alternierende, 20
Nullstelle, 65	geometrische, 19
	harmonische, 19
offen, 27	Restglied, Lagrangesche Form, 104
offene Überdeckung, 30	Restriktion, 4
Ordnung, 7	Riemannsche Zetafunktion, 21, 52
Orthogonalsystem, 113	
Orthonormalsystem, 112	Sägezahnfunktion, 121
vollständiges, 115	Satz von
	Banach (Fixpunktsatz), 26
Parallelogrammgleichung, 36	Bolzano & Weierstraß, 29
Parsevalsche Gleichung, 114	Fubini, 86
Partialbruchzerlegung, 71	Pythagoras, 36
Partialsomme, 19	Rolle, 63
partielle Integration, 70	Schlömilchsche Darstellung, 107
Partition, 73	Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren,
Poissonsche Integralformel, 123	117
Polynom, 39	Schranke
Potenzmenge, 24	obere, 11
Potenzreihe	

- untere, 11
- senkrecht, 113
- Sexagesimalsystem, 37
- sin, 55
- singulär, 43
- Singularität, 88
- sinh, 58
- Skalarprodukt, 35
- Sprungstelle, 42
- Stammfunktion, 65
- stetig, 42
 - gleichmäßig, 47
- stetige Ergänzung, 44, 47
- Substitutionsregel, 70
- Summe, 7
- Supremum, 11, 45
- Supremumsnorm, 73
- surjektiv, 5
- symmetrisch, 8
- tan, 58
- Tangentensteigung, 59
- tanh, 58
- Tautologie, 5
- Taylor
 - formel, 103
 - polynom, 103
 - reihe, 66, 103
- Teilüberdeckung, endliche, 31
- Teilfolge, 16
- Teilmenge, 3
- Teleskopsumme, 103
- Topologie, 30
 - diskrete, 30
 - triviale, 30
- transitiv, 8
- Treppenfunktion, 72
- überabzählbar, 22
- Umgebung, 28
- Umkehrabbildung, 5, 48
- umkehrbar eindeutig, 5
- Ungleichung
 - von Bernoulli, 9
 - Besselsche, 114
 - Cauchy & Schwarzsche, 35
- Unterraum, 41
- Urbild, 4
- Verkettung, 4
- Verknüpfung, 4, 61
- Vervollständigung, 17
- vollständig, 25
 - geordnet, 8
- vollständige Induktion, 9
- Vollständigkeitsaxiom, 12
- Wahrheitswert, 5
- Weierstraßscher Approximationssatz, 109
- wohlgeordnet, 8
- Wurzelkriterium, 21
- Zahlen
 - algebraische, 39
 - komplexe, 12
 - natürliche, 7, 8
 - rationale, 10
 - reelle, 11
 - transzendente, 39
- Zwischenwertsatz, 46